ҚАЗАҚСТАН
ТӘУЕЛСІЗДІГІНЕ
30 ЖЫЛ

СБОРНИК

единоличных научных публикаций

к.ф. - м.н., профессора Иманбаева Н.С.

«Спектральные задачи дифференциальных операторов
с регулярными краевыми условиями»

Монография

Министерство образования и науки Республики Казахстан

СБОРНИК

единоличных научных публикаций

к.ф. - м.н., профессора Иманбаева Н.С.

«Спектральные задачи дифференциальных операторов с регулярными краевыми условиями»

Монография

Шымкент 2022

УДК 517
ББК 22.161.6
И50

Печатается по решению Ученого совета Южно-Казахстанского государственного педагогического университета, протокол №6 от 29.12.2021 г.

Рецензенты:

Сарсенби А.М. – доктор физико-математических наук, профессор
Роговой А.В. – кандидат физико-математических наук, доцент
Курмыш Е – кандидат физико-математических наук, доцент.

И50 Иманбаев Н.С.
Сборник единоличных научных публикаций «Спектральные задачи дифференциальных операторов с регулярными краевыми условиями»: монография.
– Шымкент: Типография «Әлем», 2022. - 196 с.

ISBN 978-9965-20-274-2

Монография посвящена изложению исследований автора по спектральной теории дифференциальных операторов, как с нелокальными краевыми условиями, так и с внутренне-краевыми условиями. Тематика касается, как обыкновенных, так и дифференциальных операторов в частных производных. Излагаемые результаты представляют прежде всего теоретический интерес. Они могут быть использованы в теории краевых задач для широкого класса дифференциальных уравнений, для дальнейшей разработки спектральной теории краевых задач. Сборник посвящается 30-летию независимости Республики Казахстан. Монография является отчетом научного исследования автора за годы независимости нашей страны. Сборник предназначен для специалистов в области дифференциальных уравнений и теории дифференциальных операторов, Ph. докторантов, магистрантов и студентов старших курсов математических специальностей.

УДК 517
ББК 22.161.6

ISBN 978-9965-20-274-2

Научные руководители:

Кангужин Балтабек Есматович – доктор физико-математических наук, профессор,

Лучший преподаватель ВУЗа МОН РК дважды,

Лучший научный работник МОН РК

(КазНУ им. аль-Фараби, ИМММ, г. Алматы);

Токибетов Жанузак Абдикулович – кандидат физико-математических наук,

профессор КазНУ им. аль-Фараби, г. Алматы.

Научный консультант:

Садыбеков Махмуд Абдысаметович – доктор физико-математических наук, профессор,

Лучший преподаватель ВУЗа,

Член-корреспондент НАН РК,

Лауреат Государственной Премии РК.

(ИМММ, КазНУ им. аль-Фараби, г. Алматы)

СОЮЗ СОВЕТСКИХ СОЦИАЛИСТИЧЕСКИХ РЕСПУБЛИК (СССР)

1983 г. – окончил с/ш им. Джамбула, Сарыагаческий р/н, Чимкентская обл., Каз ССР

1983-1990 г.г. – окончил математический фак. КазГУ им. С.М. Кирова, г. Алма-Ата, Каз ССР

1984-1986 г.г. – служба в рядах СА, г. Балабаново, г. Переславль-Залесский, РСФСР

1990-1991 г.г. – преподаватель кафедры высшей математики КазХТИ, г. Чимкент, Каз ССР

РЕСПУБЛИКА КАЗАХСТАН

1997 г. – кандидат физико-математических наук (КазНУ им. аль-Фараби, г. Алматы)

2000-2004 г.г. – член дисс. совета К.14.29.13 (ЮКГУ им. М. Ауезова, г. Шымкент)

2002 г. – доцент по специальности 01.01.00 – Математика (ВАК МОН РК, г. Алматы)

2004-2007 г.г. – зав. каф. высшей математики ШИ МКТУ им. А. Ясави (г. Шымкент)

2010 г. – академический профессор МКТУ им. А. Ясави (г. Туркестан)

2014 г. – профессор по специальности 01.01.00 – Математика (КОКСОН, г. Астана)

2015 г. – удостоен званию «За академическую честность» (АлМУ, г. Алматы)

2015-2017 г.г. – руководитель проекта – грант 0825/ГФ4 (ВНС ИМММ, г. Алматы)

2017 г. – «Лучший преподаватель ВУЗа» (МОН РК, г. Астана),

«Лучший ученый года ЮКГПИ - 2017» (г. Шымкент),

Почетная грамота Областного маслихата ЮКО (г. Шымкент)

2018 г. – вошел в ТОП – 50 по рейтингу НААР

2019 г. – награжден нагрудным знаком «За заслуги в развитии науки РК» (г. Нур-Султан)

2020 г. – вошел в ТОП – 50 по рейтингу НААР, член экспертной комиссии НЦГТЭ (г. Алматы)

2021-2023 г.г. – руководитель проекта – грант AP09260752 (ГНС ИМММ, г. Алматы)

2021 г. – член дисс. совета по защите Ph.D – 6D010600 – Математика

КарГУ им. Е. Букетова, г. Караганда, АРУ им. К. Жубанова, г. Актюбинск,

Организатор и со руководитель общегородского научного семинара «Дифференциальные операторы и их приложения» при ЮКГПУ, г. Шымкент,

«Лучший ученый года ЮКГПУ - 2021» (г. Шымкент);

Руководитель 15 магис. дисс., официальный оппонент – 6 кандидатским дисс, рецензент – 2 - Ph.D – дисс. По базе Web of science – индекс Хирша h=5, по Scopus – индекс Хирша h=6.

Введение

Наряду с классическими краевыми и начально-краевыми задачами, в последнее время внимание многих ученых привлекают задачи математической физики с нелокальными (неклассическими) дополнительными условиями. Теория нелокальных краевых задач важна сама по себе как раздел общей теории краевых задач для дифференциальных уравнений и как раздел математики, имеющий многочисленные приложения в механике, физике, биологии и других естественно-научных дисциплинах. Нелокальными краевыми задачами принято называть задачи, в которых вместо задания значений решения или его производных на фиксированной части границы задается связь этих значений со значениями тех же функций на иных внутренних или граничных многообразиях. К ним относятся краевые задачи с условиями типа периодичности, с условием Бицадзе-Самарского, с условиями интегрального типа, а также задачи с многоточечными граничными условиями общего вида. Актуальность изучения этих задач обусловлена наличием ряда физических приложений в области электростатики, электродинамики, теории упругости, физики плазмы, многослойной оптики и т.п.

В теории несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве важную роль играют вопросы полноты и базисности систем корневых векторов. Для многих классов несамосопряженных операторов вопросы полноты системы корневых векторов исследованы в настоящее время весьма хорошо. Значительно менее хорошо, чем вопросы полноты, исследованы вопросы базисности систем корневых векторов.

Хорошо известно, что система собственных функций оператора, заданного формально самосопряженным дифференциальным выражением, с произвольными самосопряженными краевыми условиями, обеспечивающими дискретный спектр, образует ортонормированный базис пространства квадратично суммируемых функций. Во многих работах исследовался вопрос о сохранении свойств базисности при некотором (слабом в определенном смысле) возмущении исходного оператора. Например, в случае несамосопряженных дифференциальных операторов полнота собственных функций не обеспечивает их базисность. Теория базисности собственных функций несамосопряженных дифференциальных

операторов получила существенное развитие в работах Г.М. Кесельмана, В.П. Михайлова, В.А. Ильина, а также Казахстанских математиков А.М. Сарсенби, М.А. Садыбекова, Б.Е. Кангужина.

Значимость сборника публикации-монографии состоит в том, что исследуемые объекты-нелокальные задачи с одной стороны имеют многочисленные приложения в механике, физике, биологии и других естественно-научных дисциплинах, а с другой стороны, к таким задачам имеется существенный интерес с чисто математической точки зрения. Поэтому полученные результаты являются актуальными и будут понятны специалистам в этой области. И могут быть ими использованы для дальнейших исследований.

Пользуясь случаем, хочу выразить особую благодарность моим учителям д.ф.-м.н., профессору Б.Е. Кангужину, к.ф.-м.н., профессору КазНУ им. аль-Фараби Ж.А. Токибетову, Член-корреспонденту НАН РК, д.ф.-м.н., профессору М.А. Садыбекову за научное руководство, за постановку задач, за поддержку при поступлении в очную аспирантуру, за постоянную поддержку в целом и внимание к работам. А также, весьма признателен Академику НАН РК Т.Ш. Кальменову, Академику НАН РК М. Отелбаеву, д.ф.-м.н., профессору А.М. Сарсенби и д.ф.-м.н., профессору Б.Х. Турметову за ценные советы, которые внесшие существенный вклад к моему становлению как специалиста. И благодарю за поддержку экс-ректора МКТУ им. А. Ясави, Академика НАН РК покойного Л. Ташимова .

В заключении отметим, что данная работа является отчетом научного исследования автора за годы Независимости нашей страны, и посвящается 30 - летию Независимости Республики Казахстан!

С уважением,

Нурлан Сайрамович Иманбаев!

Mathematical Reviews
416 Fourth Street
P.O. Box 8604
Ann Arbor, MI 48107-8604
USA

VIA AIRMAIL
CORREO AEREO ★ PAR AVION

PAR AVION

Mathematical Reviews
A division of the
American Mathematical Society

Operating in cooperation with the University of Michigan
416 Fourth Street, P.O. Box 8604
Ann Arbor, MI 48107-8604 USA
Telephone: 734-996-5250
FAX: 734-996-2916
www.ams.org/mr-database/

Bibliographic Services AR

Telephone: 734-996-5262
e-mail: tld@ams.org

December 10, 2002

Dr. N. S. Imanbaev
"Kh. A. Yasavi" International Kazakh-Turkish University
Shymkent
KAZAKHSTAN

Dear Dr. Imanbaev:

Mathematical Reviews would like to ask your help in identifying your papers in our bibliographic files so that they may be presented properly in our publications.

Below is a bibliographic entry which you may have written.

Imanbaev, N. S. and Kanguzhin, B. E., *On zeros of entire functions that have an integral representation* (Russian). Izv. Nats. Akad. Nauk Respub. Kazakhstan Ser. Fiz.-Mat. 1995, no. 3, 47–51; MR 98i:30038

Please indicate if the article is yours and return this letter. We would be most grateful if you could help us identify the authors of the articles which are not yours by giving us fuller forms of their names (if applicable) and their addresses if you know them.

We would also be grateful if you would print the fullest version of your name, indicating uppercase, lowercase, accents, spaces and hyphens as you would like them to appear, on the lines below.

Full Version of Name

_____
Last (Nachname, Apellido, Nom de famille)

_____
First (Vorname, Nombre, Prénom) **Middle**

We would appreciate hearing from you as soon as possible and have enclosed a return envelope to expedite your reply.

Thank you.

Terrie DeBonis

Terrie DeBonis
Technical Library Assistant

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ,
ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
ҰЛТТЫҚ ҒЫЛЫМ АКАДЕМИЯСЫНЫҢ

ХАБАРЛАРЫ
ИЗВЕСТИЯ

МИНИСТЕРСТВА ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН,
НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

СЕРИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

1(221)

ЯНВАРЬ–ФЕВРАЛЬ 2002 г.

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1963 ГОДА

ВЫХОДИТ 6 РАЗ В ГОД

АЛМАТЫ
НИЦ "ҒЫЛЫМ"

Известия МОН РК, НАН РК.
Серия физико-математическая. 2002. № 1

УДК 517.945

Н. С. ИМАНБАЕВ

О НЕТЕРОВОСТИ ОДНОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Доказана нетеровость и вычислен индекс сингулярного интегрального уравнения, связанного со спектральными вопросами оператора Коши-Римана с нелокальными краевыми условиями.

Рассматривается вопрос о вычислении индекса и нетеровости сингулярного интегрального уравнения, связанного с оператором Коши–Римана, для вещественно значной функции $u(z)$ на единичной окружности $|z|=1$:

$$a(z)u(z)-\frac{b(z)}{\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{u(t)}{t-z}dt+\int\limits_{|t|=1}T(z,t,\lambda)u(t)dt=0, \tag{1}$$

где

$$a(z)=\frac{(\lambda-2)\ell^{\bar{\lambda}z}+(\bar{\lambda}-2)\ell^{\bar{\lambda}z}}{2}, \quad b(z)=\frac{(2-\lambda)\ell^{\lambda\bar{z}}-(2-\bar{\lambda})\ell^{\bar{\lambda}z}}{2},$$

$T(z,t,\lambda)$ -- непрерывное ядро. К подобной проблеме сводятся задачи на собственные значения для операторов, порождаемых операцией Коши–Римана. В частности, к изучаемому вопросу приводит задача на собственные значения оператора Коши-Римана с нелокальными краевыми условиями [1, 2]:

$$K\omega(z)\equiv\frac{\partial\omega(z)}{\partial\bar{z}}=\lambda\omega(z)\ ,\ |z|=1\ . \tag{2}$$

$$D(K)=\{\omega(z)\in C(|z|\le 1)\ ,\ \frac{\partial\omega(z)}{\partial\bar{z}}\in C(|z|<1)\ ,$$

$$\operatorname{Re}\omega(z)=\operatorname{Re}\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|t|=1}\frac{\lambda\omega(t)}{t-z}dt\ ,\ |z|=1\ , \tag{3}$$

$$\operatorname{Jm}\omega(0)=\operatorname{Jm}\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|t|=1}\frac{\lambda\omega(t)}{t}dt\ ,\ z=0\}\ , \tag{4}$$

где λ – спектральный параметр. Здесь задача заключается в нахождении комплексных чисел λ, при котором операторное уравнение (2) имеет ненулевые решения.

Неоднородная система Коши–Римана и ее обобщения изучались в работах [3, 4], где подробно исследовались обобщенная задача Римана–Гильберта, задача сопряжения и другие.

Доказано следующее утверждение.

Теорема 1. При выполнении неравенства $\lambda \neq 2$ сингулярное интегральное уравнение **(1)** для вещественно значной функции $u(t)$ нетерово и индекс нетера $\aleph = 0$.

Доказательство. Индексом [5,6] уравнения (1) называется целое число

$$\aleph = \frac{1}{2\pi i}\left[\ln\frac{a(z)+b(z)}{a(z)-b(z)}\right]_{|z|=1}, \tag{5}$$

где $[\bullet]_{|z|=1}$ – означает приращения функции, заключенной в квадратные скобки, при обходе единичной окружности в положительном направлении.

Нетеровость уравнения **(1)** нарушается при выполнении неравенств $a(z) = 0$ и $b(z) = 0$ при всех $|z| = 1$, т. е.

$$\left.\begin{aligned}(\lambda-2)e^{\lambda\bar{z}}+(\bar{\lambda}-2)e^{\bar{\lambda}z}=0,\\ (2-\lambda)e^{\lambda\bar{z}}-(2-\bar{\lambda})e^{\bar{\lambda}z}=0.\end{aligned}\right\}$$

Отсюда следует нетеровость уравнения **(1)** для всех λ, удовлетворяющих неравенству $\lambda \neq 2$. Отметим, что $b(z)$ – чисто мнимая, $a(z)$ – вещественная функции. Поскольку выражения $a(z)+b(z)$ и $a(z)-b(z)$ комплексно сопряжены, следовательно, индекс $\aleph$ выражается формулой

$$\aleph = \frac{1}{\pi}\Delta_{|z|=1}\ \mathrm{Arg}\,(a(z)+b(z)), \tag{6}$$

где $\Delta_{|z|=1}\ \mathrm{Arg}\,(a(z)+b(z))$ – приращение $\mathrm{Arg}\,(a(z)+b(z))$ вдоль $|z| = 1$ при обходе в положительном направлении. Известно [7], что

$$\mathrm{Arg}\,(a(z)+b(z)) = \mathrm{Arg}\,(\bar{\lambda}-2)e^{\bar{\lambda}z} = \mathrm{Arg}\,(\bar{\lambda}-2) + \mathrm{Arg}\,e^{\bar{\lambda}z} = \mathrm{Arg}\,(\bar{\lambda}-2) +$$
$$+\mathrm{Arg}\,e^{\mathrm{Re}(\bar{\lambda}z)+i\mathrm{Im}(\bar{\lambda}z)} = \mathrm{Arg}\,(\bar{\lambda}-2) + Jm\bar{\lambda}z.$$

Найдем индекс

$$\aleph = \frac{1}{\pi}\Delta_\Gamma Arg(\bar{\lambda}-2) + \frac{1}{\pi}\Delta_\Gamma Jm\bar{\lambda}z$$

при обходе единичной окружности $\Gamma=\{|z|: |z|=1\}$ против часовой стрелки [5, 6] в положительном направлении. Приращение $Arg(\bar{\lambda}-2)$ будет нулевым, поскольку величина $(\bar{\lambda}-2)$ не зависит от z. Для вычисления приращения мнимой части $\bar{\lambda}z$ заметим, что когда z делает один оборот против часовой стрелки вдоль единичной окружности, величина $\bar{\lambda}z$ совершает такой же

оборот вдоль окружности радиуса $|\lambda|$. При этом мнимая часть $\bar{\lambda}z$ изменяется на вертикальном отрезке от $-|\lambda|$ до $|\lambda|$ дважды: один раз проходит от $-|\lambda|$ до $|\lambda|$ вверх, а затем совершает тот же путь в обратном направлении. Итак, приращение мнимой части величины $\bar{\lambda}z$ равно нулю, когда z делает один оборот вдоль единичной окружности. Следовательно, индекс $\aleph$ сингулярного интегрального уравнения (1) равен нулю. Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Отелбаев М., Шыныбеков А. Н.* О корректных задачах типа Бицадзе–Самарского // ДАН СССР. 1982. Т. 265, № 4. С. 815–819.
2. *Иманбаев Н. С.* Редукция задачи на собственные значения оператора Коши–Римана к сингулярному интегральному уравнению // Поиск. Серия естественных наук. 1998. № 5. С. 134–141.
3. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Наука, 1988. 512 с.
4. *Блиев Н. К.* Обобщенные аналитические функции в дробных пространствах. Алма-Ата: Наука, 1985.
5. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968. 511 с.
6. *Михлин С. Г.* Сингулярные интегральные уравнения // Успехи мат. наук. 1948. Вып. 3(25). С. 30–111.
7. *Титчмарш Е.* Теория функций. М.: Наука, 1980. 463 с.

Резюме

Локальді емес шекаралық шарттармен берілген Коши–Риман операторымен байланысты сингулярлық интегралдық теңдеудің индексі есептелген болатындығы және нетерлі скендігі дәлелденген.

Summary

The index of singular integrale equation connected with spectral problem of Koshy-Riman's operator with unlocal boundary conditions.is calculated and neterness is proved.

Международный казахско-турецкий университет им. Х. А. Ясави, г. Шымкент

Поступила 27.09.2000 г.

Министерство Образование и Науки Республики Казахстан

Международный Казахско-Турецкий Университет имени Х. А. Ясави
Шымкентский Институт

МАТЕРИАЛЫ

Международной научной конференций

" Проблемы прикладной математики "

(19 - 20 мая 2006 г.)

ШЫМКЕНТ - 2006

Международная научная конференция посвящается к 70 – летию к.ф.-м.н., профессора МКТУ Жузбая Киргизбаева и к.ф.-м.н., профессора МКТУ Малике Абеновой.

Орг. комитет конференций

Председатель: д.т.н., профессор Л. Гашимов,

Сопредседатель: к.ф.-м.н., доцент Н.С. Иманбаев

Члены орг. комитета:

- Академик НАН РК, д.ф.-м.н., профессор Т.Ш. Кальменов (Алматы, ЦФМИ)
- Академик НАН РК, д.т.н., профессор О.С. Балабеков
- д.т.н., профессор К.М. Исламкулов
- д.т.н., профессор Т.П. Раимбердиев
- д.т.н., профессор Ж.Т. Айменов
- к.х.н., профессор МКТУ С.К. Тургабаев
- д.ф.-м.н., профессор Р.Г. Мухарлямов (Москва, РУДН)
- д.ф.-м.н., профессор А.Л. Куницын (Москва, МАИ)
- д.ф.-м.н. Б.Е. Кангужин (Алматы, КазНУ им. Аль-Фараби)
- д.ф.-м.н. М.А. Садыбеков (Алматы, ЦФМИ)
- д.ф.-м.н. Б. Турметов
- д.ф.-м.н., профессор А. Кудайкулов
- к.пед.н., доцент Р.И. Ибрагимов
- к.ф.-м.н., доцент Н.Е. Ержанов
- к.ф.-м.н. Д.А. Иманбеков
- к.ф.-м.н. Ж. Жунисбеков
- к.ф.-м.н. А. Сарсенби (ЮКГУ им. М. Ауэзова)
- к.ф.-м.н. М. Сарыбаев
- к.пед.н., профессор МКТУ А. Амирбек

Секретарь:

- к.ф.-м.н. А.Д. Нияэымбетов

ISBN 9965-892-65-X

МАТЕМАТИКА СЕКЦИЯСЫ

ОБ ОДНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ, СВЯЗАННОЙ С ОПЕРАТОРОМ КОШИ-РИМАНА

Иманбаев Н.С.

Шымкентский Институт

Международного Казахско-Турецкого Университета им. Х.А.Ясави, Шымкент, Казахстан

В работе рассматривается задача на собственные значения оператора Коши-Римана для задачи Дирихле с однородными краевыми условиями, то есть

$$K\omega(z) \equiv \frac{\partial\omega(z)}{\partial\bar{z}} = \lambda\omega(z),\ |z| < 1, \qquad (1)$$

$$D(K) = \left\{\omega(z) \in C(|z| \le 1),\ \frac{\partial\omega(z)}{\partial\bar{z}} \in C(|z| < 1),\ \mathrm{Re}\,\omega(z) = 0,\ |z| = 1,\ \mathrm{Im}\,\omega(0) = 0,\ z = 0\right\}, \qquad (2)$$

где λ – спектральный параметр.

Постановка задачи. Найти те комплексные значения $\lambda \in C$ - множество комплексных чисел, при которых операторное уравнение (1), имеет ненулевые решения.

Основные результаты. Спектральная задача (1),(2) редуцирована к сингулярному интегральному уравнению, а затем сведена к интегральному уравнению Фредгольма второго рода с непрерывным ядром, т.е.

$$u(z) + \oint_{|t|=1}\left[\frac{e^{\bar{t}(z-t)\bar{z}} - 1}{\pi t}\cdot\frac{e^{\bar{z}(t-z)t}}{t-z} + \frac{e^{\lambda z} - 1}{4\pi t}\right]u(t)dt = 0,\ |z| = 1 \qquad (3)$$

При редукции задачи (1),(2) к сингулярному интегральному уравнению вычислена ее индекс, который равен нулю, а также установлена условия нетеровости.

Итак нами доказано, что спектральная задача (1),(2) является вольтерровым.

Список использованной литературы:

1. Отелбаев М., Шыныбеков А.Н. О корректных задачах типа Бицадзе-Самарского // ДАН СССР. 1982. Т.265. №4. С.815-819.
2. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Наука, 1968.
3. Михлин С.Г. Сингулярные интегральные уравнения // УМН. 1948. Т. Вып. 3(25). С. 33-111.
4. Иманбаев Н.С., Кангужин Б.Е., Киргизбаев Ж. О фредгольмовости одной спектральной задачи, связанной с оператором Коши-Римана // Межвузовский сборник научных трудов. Москва. РГОТУПС, 2002. С.54-59.
5. Иманбаев Н.С. О нетеровости одного сингулярного интегрального уравнения // Известия НАН РК. Серия физико-математическая. 2002.№1(221). С. 90-93.
6. Иманбаев Н.С. К вычислению индекса одного квазисингулярного интегрального уравнения // Труды международной научной конференции "Современные проблемы математической физики". Ташкент: НУУ им. М.Улугбека, Институт математики им. В.И.Романовского АН РУз, 2003. Т.2.С.47-49.

Айталық, $x;y\in[e]_\sigma$ болсын. Онда 1) сәйкес $x;y\in[e]_\sigma \Rightarrow (e\sigma x)\,\&\,(e\sigma y)\Rightarrow((e*e)\sigma(x*y))$, яғни, $e\sigma(x*y)$ және сол себепті $(x*y)\in[e]_\sigma$. Сонымен, а.1) пункті дәлелденді; а.2) пункті осыған ұқсас 2)-ден алынады.

б) Дәлелдеу карапайым қамтылу әдісімен жүргізіледі.

$[a]_\sigma \subseteq (a*[e]_\sigma)$ қамтылуын дәлелдейік.

Айталық, $x\in[a]_\sigma$, яғни, $a\sigma x$. σ қатынасы рефлективті болғандықтан, онда $a'\sigma a'$.

$a\sigma x$ және $a'\sigma a'$-тен 1) импликацияны қолдану арқылы $(a'*a)\sigma(a'*x)$ немесе $e\sigma(a'*x)$ аламыз. Бұл бізге не $(a'*x)\in[e]_\sigma$, не $x\in a*[e]_\sigma$ береді. Кері қамтылу осыған ұқсас тексеріледі.

Айталық, енді $G_1=<G_1;\cdot;';e_1>$ және $G_2=<G_2;\cdot;';e_2>$ екі группасы және G_1 группасының G_2 группасына гомоморфты бейнелеуі φ берілсін. Онда теңбейнелілік қатынасы P_φ G_1 жиынындағы конгруэнция болады және әрі қарай дәстүрлі түрде группалардың гомоморфизмі туралы бірінші теорема дәлелденеді.

References

1. *Kargapolov M., Merzlyakov I.* Basic theory of groups. — M.: Science, 1982. — P. 288.
2. *Mal'cev A.I.* Algeraic system. — M.: Science, 1970. — P. 392.
3. *Goncharov S.S., Ershov U.L., Samokhvalov K.F.* Introduction to logic and methodology of science. — M.: Interpraks, 1994. — P. 255.

УДК 517.927.25

О неустойчивости свойств базисности корневых функций возмущенной задачи Самарского-Ионкина

On non-stability of properties of basisness of one type of problems Samarski-Ionkin on the eigenvalues with nonlocal perturbation of boundary conditions

Иманбаев Н.С.

Международный Казахско-Турецкий университет им. Х.А.Ясави, Шымкент (E-mail: imanbaevnur@mail.ru)

Біршама қобалжуы бар алғашқы оператордың базистік қасиеттерінің сақталуы туралы сұрақ қазіргі кезде өзекті болып табылады. Мақалада қобалжуы шеттік шарттармен берілген екінші ретті дифференциалдық теңдеудің спектралдық есебінің сипаттамалық анықтауышы қобалжулы емес спектралдық Самарский-Ионкин есебінің сипаттамалық анықтауышынан тәуелді екендігі дәлелденген. Интегралдық қобалжулы шеттік шарты бар есептің өзіндік функцияларының жүйесі үшін Рисс базистігі қасиеттерінің тұрақсыздығы көрсетілген.

The question about conservation properties of basisness of source operator at presence of a certain indignation it is enough actual. In given work is proved that characteristic determinant of the spectral problem for differential equation of the second order with outraged boundary condition is depending of characteristic determinant of nonindignant spectral problem of Samarski-Ionkin. Non-stability of properties of Riss basisness systems of proper functions of problem under integral indignation of the boundary condition is shown.

Хорошо известно, что система собственных функций оператора, заданного формально самосопряженным дифференциальным выражением, с произвольными самосопряженными краевыми условиями, обеспечивающими дискретный спектр, образует ортонормированный базис пространства L_2. Во многих работах исследовался вопрос о сохранении свойств базисности при некотором (слабом в

определенном смысле) возмущении исходного оператора. Например, для случая самосопряженного исходного оператора аналогичный вопрос исследовался в [1–3], а для несамосопряженного — в [4].

В [9] исследовались базисные свойства корневых функций спектральной задачи:

$$\ell(u) \equiv -u''(x) = \lambda u(x), \quad 0 < x < 1,$$

$$U_1(u) \equiv u'(0) - u'(1) = 0,\ U_2(u) \equiv u(0) = \int_0^1 \overline{p(x)} u(x)\,dx, \quad p(x) \in L_2(0,1).$$

Если $p(x) \equiv 0$, то эта задача называется задачей Самарского-Ионкина [4].

В настоящей работе рассматривается спектральная задача

$$\ell(u) \equiv -u''(x) = \lambda u(x), \quad 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$U_1(u) \equiv u'(0) - u'(1) = \int_0^1 \overline{p(x)} u(x)\,dx, \quad p(x) \in L_2(0,1), \tag{2}$$

$$U_2(u) \equiv u(0) = 0. \tag{3}$$

Вопрос о базисности собственных и присоединенных функций (СиПФ) оператора с более общими интегральными краевыми условиями положительно решен в [5], где доказана базисность Рисса со скобками при условии регулярности, по Биркгофу [6; 66–67], краевых условий невозмущенной задачи, а при дополнительном предположении усиленной регулярности — базисность Рисса. В нашем случае невозмущенные краевые условия (2), (3) (когда $p(x) \equiv 0$) являются регулярными, но не усиленно регулярными краевыми условиями. Поэтому из [5] следует, что система СиПФ задачи (1)–(3) образует базис Рисса со скобками, а по вопросу базисности Рисса требуется дополнительное исследование. В настоящей работе мы построим характеристический определитель спектральной задачи (1)–(3). На основании полученной формулы делаются выводы о неустойчивости свойств базисности Рисса системы собственных функций задачи при интегральном возмущении краевого условия.

Одной из особенностей рассматриваемой задачи является то, что сопряженной к (1)–(3) является спектральная задача для нагруженного дифференциального уравнения

$$\ell^*(v) = -v''(x) + p(x)v(0) = \bar{\lambda} v(x),\ V_1(v) \equiv v'(1) = 0,\ V_2(v) \equiv v(0) - v(1) = 0. \tag{4}$$

Построим сначала характеристический определитель спектральной задачи. Представляя общее решение уравнения (1) при $\lambda \neq 0$ по формуле $u(x,\lambda) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x$ и удовлетворяя его краевым условиям (2), (3), получаем линейную систему относительно коэффициентов C_k:

$$\begin{cases} \left[\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} - \int_0^1 \overline{p(x)}\cos\sqrt{\lambda}x\,dx\right]C_1 + \left[\sqrt{\lambda}\left(1-\cos\sqrt{\lambda}\right) - \int_0^1 \overline{p(x)}\sin\sqrt{\lambda}x\,dx\right]C_2 = 0, \\ C_1 = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Ее определитель и будет характеристическим определителем задачи (1)–(3):

$$\Delta_1(\lambda) = \sqrt{\lambda}\left(1-\cos\sqrt{\lambda}\right) - \int_0^1 \overline{p(x)}\sin\sqrt{\lambda}x\,dx. \tag{6}$$

При $p(x) = 0$ получается характеристический определитель невозмущенной задачи (1)–(3). Обозначим его через $\Delta_0(\lambda) = \sqrt{\lambda}\left(1-\cos\sqrt{\lambda}\right)$. Число $\lambda_0^0 = 0$ является однократным собственным значением невозмущенной задачи (1)–(3), а $u_0(x) = +\sqrt{3}x$ — соответствующей собственной функцией. Остальные собственные значения невозмущенной задачи (1)–(3) являются двукратными: $\lambda_k^0 = (2k\pi)^2$, $k = 1,2,3,\ldots$. При этом $u_{k0}^0 = \sqrt{2}\sin 2k\pi x$ — соответствующие им собственные, а $u_{k1}^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}x\cos 2k\pi x$ — присоединённые функции. С учетом условия биортогональности $\left(u_{k1}^0, v_{k1}^0\right) = 1$ имеем $v_{k1}^0 = 4\sqrt{2}\cos 2k\pi x$ — собственную и $v_{k0}^0 = 2\sqrt{2}(1-x)\sin 2k\pi x$ — присоединенную функции сопряженной задачи к задаче Самарского–Ионкина. Система $\left\{v_{k0}^0, v_{k1}^0\right\}$ образует базис Рисса в $L_2(0,1)$ [4].

Функцию $p(x)$ представим в виде биортогонального разложения в ряд Фурье по системе $\{v_{k0}^0, v_{k1}^0\}$:

$$p(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_{k0}v_{k0}^0+\sum_{k=0}^{\infty}a_{k1}v_{k1}^0=\sum_{k=1}^{\infty}a_{k0}2\sqrt{2}(1-x)\sin 2k\pi x+\sum_{k=0}^{\infty}a_{k1}4\sqrt{2}\cos 2k\pi x. \qquad (7)$$

Используя (7), найдем более удобное представление определителя $\Delta_1(\lambda)$. Для этого сначала вычислим интеграл, входящий в (6). Несложные вычисления показывают, что

$$\int_0^1\overline{p(x)}\sin\sqrt{\lambda}x\,dx=2\sqrt{2\lambda}\left[1-\cos\sqrt{\lambda}\right]\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{2k\pi\overline{a_{k0}}}{\left[\lambda-(2k\pi)^2\right]^2}+\frac{2\overline{a_{k1}}}{\lambda-(2\pi k)^2}\right]\right).$$

Используя полученное, определитель (6) стандартными преобразованиями приводится к виду

$$\Delta_1(\lambda)=\Delta_0(\lambda)\cdot A(\lambda),\ \text{где}\ A(\lambda)=\left[1-4\sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\pi\overline{a_{k0}}\frac{k}{\left[\lambda-(2k\pi)^2\right]^2}+\overline{a_{k1}}\frac{k}{\lambda-(2k\pi)^2}\right)\right]. \qquad (8)$$

Таким образом, доказана

Теорема 1. Характеристический определитель спектральной задачи (1)–(3) с возмущенными краевыми условиями представим в виде (8), где $\Delta_0(\lambda)$ — характеристический определитель невозмущенной спектральной задачи Самарского-Ионкина, a_{k0}, a_{k1} — коэффициенты Фурье биортогонального разложения (7) функции $p(x)$ по системе СиПФ сопряженной невозмущенной спектральной задачи Самарского-Ионкина.

Функция $A(\lambda)$ из (8) имеет полюса второго и первого порядков в точках $\lambda=\lambda_k^0$, а функция $\Delta_0(\lambda)$ имеет нули второго порядка в этих же точках. Поэтому функция $\Delta_1(\lambda)$, представленная по формуле (8), является целой аналитической функцией переменного λ.

Если при некотором индексе j коэффициенты разложения (7) $a_{j0}=0$, $a_{j1}=0$, тогда $\lambda_j^1=\lambda_j^0$ является двукратным собственным значением возмущенной задачи (1)–(3). Если же $a_{j0}=0$, $a_{j1}\neq 0$, то $\lambda_j^1=\lambda_j^0$ является однократным собственным значением задачи (1)–(3).

Более просто характеристический определитель (8) выглядит в случае, когда $p(x)$ представляется в виде (7) с конечной первой суммой. То есть когда существует такой номер N, что $\overline{a_{k0}}=0$, $\overline{a_{k1}}=0$ для всех $k>N$. В этом случае формула (8) принимает вид

$$\Delta_1(\lambda)=\Delta_0(\lambda)\left[1-4\sqrt{2}\sum_{k=1}^{N}\left(\pi\overline{a_{k0}}\frac{k}{\left[\lambda-(2k\pi)^2\right]^2}+\overline{a_{k1}}\frac{k}{\lambda-(2k\pi)^2}\right)\right]. \qquad (9)$$

Из этого частного случая формулы (8) несложно обосновать следующее

Следствие 1. Для любых наперед заданных чисел — комплексного $\hat{\lambda}$ и натурального $\hat{m}$ всегда существует такая функция $p(x)$, что $\hat{\lambda}$ будет являться собственным значением задачи (1)–(3) кратности $\hat{m}$.

Из анализа формулы (9) легко видеть, что $\Delta_1(\lambda_k^0)=0$ для всех $k>N$. То есть все собственные значения λ_k^0, $k>N$, невозмущенной задачи Самарского-Ионкина являются собственными значениями возмущенной спектральной задачи (1)–(3). Также нетрудно убедиться, что сохраняется и кратность собственных значений λ_k^0, $k>N$.

Более того, из условия ортогональности $p(x) \perp u_{j0}^0$, $p(x) \perp u_{j1}^0$ при всех $j > N$ следует, что в этом случае $\int_0^1 \overline{p(x)} u_{j0}^0(x)dx = \int_0^1 \overline{p(x)} u_{j1}^0(x)dx = 0$. Поэтому собственные $u_{j0}^0(x)$ и присоединенные $u_{j1}^0(x)$ функции невозмущенной задачи Самарского-Ионкина при всех $j > N$ удовлетворяют краевым условиям (2), (3) и, следовательно, являются собственными и присоединенными функциями возмущенной задачи (1)–(3). Значит, в этом случае системы СиПФ возмущенной задачи (1)–(3) и СиПФ невозмущенной задачи Самарского-Ионкина (образующая базис Рисса) отличаются друг от друга лишь по конечному числу первых членов. Следовательно, система СиПФ возмущенной задачи (1)–(3) также образует базис Рисса в $L_2(0,1)$.

Так как множество функций $p(x)$, представимых в виде конечного ряда (7), является плотным в $L_2(0,1)$, то таким образом доказана

Теорема 2. Множество функций $p(x) \in L_2(0,1)$ таких, что система СиПФ возмущенной задачи (1)–(3) образует базис Рисса в $L_2(0,1)$, является плотным в $L_2(0,1)$.

Покажем теперь, что свойство базисности системы СиПФ возмущенной задачи (1)–(3) является неустойчивым при сколь угодно малом интегральном возмущении краевого условия (2). Имеет место

Теорема 3. Множество функций $p(x) \in L_2(0,1)$ таких, что система СиПФ возмущенной задачи (1)–(3) не образует даже обычного базиса в $L_2(0,1)$, является плотным в $L_2(0,1)$.

Доказательство. Очевидно, что множество функций $p(x) \in L_2(0,1)$, представимых в виде ряда (7), коэффициенты которого асимптотически (т.е. начиная с некоторого номера) обладают свойством $a_{k0} = 0, a_{k1} \neq 0$, будет плотным в $L_2(0,1)$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что для таких функций $p(x)$ система СиПФ задачи не образует обычного базиса.

Пусть j — достаточно большой номер, такой, что $a_{j0} = 0, a_{j1} \neq 0$. Тогда из (8) нетрудно видеть, что $\lambda_j^0 = (2j\pi)^2$ является однократным собственным значением задачи (1)–(3). Непосредственным вычислением легко получить, что соответствующей этому значению собственной функцией спектральной задачи (1)–(3) является $u_{j0}(x) = \sqrt{2}\sin 2j\pi x$ и $\|u_{j0}(x)\|^2 = 1$.

Найдем собственную функцию сопряженной задачи (4), соответствующую собственному значению $\lambda_j^0 = (2j\pi)^2$. Представляя общее решение нагруженного дифференциального уравнения из (4) при $\overline{\lambda} \neq 0$ по формуле

$$v(x) = C_1 \cos\sqrt{\overline{\lambda}}x + C_2 \sin\sqrt{\overline{\lambda}}x + v(0)\int_0^x p(\xi)\frac{\sin\left(\sqrt{\overline{\lambda}}(x-\xi)\right)d\xi}{\sqrt{\overline{\lambda}}}$$

и удовлетворяя его краевым условиям из (4), получаем линейную систему относительно коэффициентов C_k:

$$\begin{cases} \left[-\sqrt{\overline{\lambda}}\sin\sqrt{\overline{\lambda}} + \sqrt{\overline{\lambda}}\int_0^1 p(\xi)\cos\sqrt{\overline{\lambda}}(1-\xi)d\xi\right]C_1 + \sqrt{\overline{\lambda}}\cos\sqrt{\overline{\lambda}}C_2 = 0, \\ \left[1 - \cos\sqrt{\overline{\lambda}} - \int_0^1 p(\xi)\sin\sqrt{\overline{\lambda}}(1-\xi)d\xi\right]C_1 - \sin\sqrt{\overline{\lambda}}C_2 = 0. \end{cases}$$

При $\overline{\lambda} = \lambda_j^0 = (2j\pi)^2$ имеем

$$\begin{cases} C_1\int_0^1 p(\xi)\cos 2j\pi\xi d\xi + C_2 = 0, \\ C_1\int_0^1 p(\xi)\sin 2j\pi\xi d\xi = 0. \end{cases} \qquad (10)$$

Вычисление интегралов, входящих в (10), дает:

$$\int_0^1 p(\xi)\cos 2j\pi\xi d\xi = 2\sqrt{2}\overline{a_{j1}} + \sum_{k=1,k\neq j}^{N} \frac{\sqrt{2}}{\pi} a_{k1} \frac{k}{k^2 - j^2} \text{ при } j > N;$$

$$\int_0^1 p(\xi)\sin 2j\pi\xi d\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{a_{j0}} = 0, \text{ при } j > N.$$

Из теоремы Юнга [8, теорема 276, с. 240] следует, что $\lim\limits_{j\to+\infty} \sum\limits_{k=1,k\neq j}^{\infty} \overline{a_{k1}} \frac{k}{j^2 - k^2} = \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{j^2}\right)$. Из системы (10), выражая C_2 через C_1, получим $C_2 = -C_1\left[2\sqrt{2}\overline{a_{j1}} + \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{j^2}\right)\right]$ при $j > N$. Поэтому для всех $j > N$ при $a_{j0} = 0$, $a_{j1} \neq 0$ собственная функция сопряженной задачи (4) имеет вид:

$$v_{j0}'(x) = C_1\left(\cos 2j\pi x - \left[2\sqrt{2}\overline{a_{j1}} + \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{j^2}\right)\right]\sin 2j\pi x + \int_0^x p(\xi)\frac{\sin\left(2j\pi(x-\xi)\right)d\xi}{2j\pi}\right).$$

Константу C_1 выбираем из условия биортогональности $\left(u_{j0}(x), v_{j0}(x)\right) = 1$. Тогда имеем

$$C_{1j}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left[2\sqrt{2}a_{j1} + \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{j^2}\right) + \int_0^1 \sqrt{2}\sin 2j\pi x dx \int_0^x p(\xi)\frac{\sin\left(2j\pi(x-\xi)\right)d\xi}{2j\pi}\right]\right) = 1.$$

Используя неравенство Гёльдера для интегрального слагаемого, при $j \to \infty$ получим оценку:

$$\left|\int_0^1 \sqrt{2}\sin 2j\pi x dx \int_0^x p(\xi)\frac{\sin\left(2j\pi(x-\xi)\right)d\xi}{2j\pi}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{2}\pi j}\sqrt{\int_0^1 |p(\xi)|^2 d\xi} = \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{j}\right).$$

Тогда $C_{1j}\left[\sqrt{2}a_{j1} + \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{j}\right)\right] = 1$. Поэтому

$$C_{1j} = \frac{1}{\sqrt{2}a_{j1} + \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{j}\right)} \to \infty \text{ при } j \to \infty,$$

так как коэффициенты Фурье принадлежат классу $a_{j1} \in l_2$. Оценивая $v_{j0}(x)$ по норме $L_2(0,1)$, получим:

$$\|v_{j0}\| \geq C_{1j}\|\cos 2j\pi x\| - C_{1j}\left\|\left[2\sqrt{2}a_{j1} + \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{j^2}\right)\right]\sin 2j\pi x + \int_0^x P(\xi)\frac{\sin\left(2j\pi(x-\xi)\right)d\xi}{2j\pi}\right\| \geq$$

$$\geq \frac{C_{1j}}{\sqrt{2}}\left[1 - \left(2a_{j1} + \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{j^2}\right)\right) + \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{j}\right)\right].$$

Следовательно, $\lim_{j\to\infty}\|u_{j0}\|\cdot\|\vartheta_{j0}\| = \infty$. То есть не выполнено условие равномерной минимальности [7; 66] системы СиПФ, и, следовательно, она не образует даже обычного базиса в $L_2(0,1)$. Теорема 3 доказана.

Так как сопряженные операторы одновременно обладают свойством базисности Рисса корневых функций, то отсюда получаем

Следствие 2. Множество P функций $p(x) \in L_2(0,1)$, для которых система СиПФ задачи (4) для нагруженного дифференциального уравнения образует базис Рисса в $L_2(0,1)$, всюду плотно в $L_2(0,1)$. Множество $L_2(0,1) \setminus P$ также всюду плотно в $L_2(0,1)$.

Результаты настоящей работы, в отличие от [5], демонстрируют неустойчивость свойств базисности корневых функций задачи при интегральном возмущении краевых условий, являющихся регулярными, но не усиленно регулярными.

Автор выражает благодарность профессорам М.А.Садыбекову и А.М.Сарсенби за плодотворное обсуждение результатов.

References

1. *Markus A.S.* On decomposition on root vector of weakly outraged self-adjoint operator // Reports AN USSR. — 1962. — Vol. 142. № 3. — P. 538–541.
2. *Kerimov N.B., Mamedov H.R.* On Riss basisness of root functions of some regular boundary problems // Matem. notes. — 1998. — Vol. 64. — Iss.4. — P. 448–563.
3. *Makin A.S.* On nonlocal indignation periodic problem on proper values // Different equations. — 2006. — Vol. 42. — № 4. — P. 560–562.
4. *Iliin V.A., Krickov L.V.* The properties of the spectral decompositions, answering to non-self-adjoint operators // Functional analysis // The totals of the science and technology. Ser. modern. math. and its app. Th. review. — Vol. 96. — M.: VINITI. — 2006. — P. 5–105.
5. *Shkalikov A.A.* On basisness of proper functions of common differential operator with integral boundary condition // Bulletin of MGU. The Mathematics and mechanics. — 1982. — № 6. — P. 12–21.
6. *Naymark M.A.* The linear differential operators. — M., 1969.
7. The functional analysis (Ed. by S.G.Kreyna). — M., 1972.
8. *Hardi G.G., Littlivud Dzh.E.* Inequality. — M.: FL, 1948. — 456 p.
9. *Sadybekov M.A., Imanbaev N.S.* The base properties of root functions of outraged problem of Samarski-Ionkin // Bulletin of Academic innovational university. — Shymkent, 2011. — № 1 (001). — P. 196–201.

ISSN
1563-0285
ндекс 75872
25872

ӘЛ-ФАРАБИ атындағы ҚАЗАҚ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ
КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени АЛЬ-ФАРАБИ

ХАБАРШЫСЫ
ВЕСТНИК

- математика,
- механика,
- информатика сериясы

- серия математика,
- механика,
- информатика

АЛМАТЫ
№ 2 (69
2011

О нелокальном возмущении периодической задачи на собственные значения

Н.С. Иманбаев
Шымкентский институт Международного казахско-турецкого ун-тета им. Х.А. Ясави
e-mail: imanbaevnur@mail.ru

Аннотация

В работе рассматривается спектральная задача для оператора кратного дифференцирования с интегральным возмущением в одном из периодических краевых условиях. Построен характеристический определитель спектральной задачи. Показано, что свойство базисности систем корневых функций задачи может меняться при каком угодно малом изменении ядра интегрального возмущения.

Хорошо известно, что система собственных функций оператора, заданного формально самосопряженным дифференциальным выражением, с произвольными самосопряженными краевыми условиями, обеспечивающими дискретный спектр, образует ортонормированный базис пространства L_2. Во многих работах исследовался вопрос о сохранении свойств базисности при некотором (слабом в определенном смысле) возмущении исходного оператора. Например, для случая самосопряженного исходного оператора аналогичный вопрос исследовался в [1 - 3], а для несамосопряженного - в [4]. В настоящей работе рассматривается, близкая к исследованиям [3], спектральная задача:

$$l(u) \equiv -u''(x) = \lambda u(x), \quad 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$U_1(u) \equiv u'(0) - u'(1) = 0, \tag{2}$$

$$U_2(u) \equiv u(0) - u(1) = \int_0^1 \overline{p(x)} u(x) dx, \quad p(x) \in L_1(0,1). \tag{3}$$

Если $p(x) \equiv 0$, то задача (1) - (3) является самосопряженной, а система ее собственных функций - обычной тригонометрической системой и образует ортонормированный базис в $L_2(0,1)$. В [3] исследованы вопросы устойчивости базисных свойств периодической задачи для уравнения (1), при возмущении краевого условия (2).

Вопрос о базисности корневых функций оператора с более общими интегральными краевыми условиями положительно решен в [5], где доказана базисность Рисса со скобками при условии регулярности по Биркгофу [6, с.66-67] краевых условий невозмущенной задачи; а при дополнительном предположении усиленной регулярности - базисность Рисса. В нашем случае невозмущенные краевые условия (2), (3) являются регулярными, но не усиленно регулярными краевыми условиями. Поэтому для него не применимы результаты [5], а требуется дополнительное исследование. Из работы [5] следует, что система собственных и присоединенных функций задачи (1) - (3) полна и минимальна в $L_2(0,1)$. В настоящей работе мы построим характеристический определитель спектральной задачи (1)-(3) На основании полученной формулы делаются выводы о неустойчивости свойств базисности Рисса системы собственных функций задачи при интегральном возмущении краевого условия. Одной из особенностей рассматриваемой задачи является то, что сопряженной к (1)-(3), является спектральная задача для нагруженного дифференциального уравнения:

$$l^*(v) = -v''(x) + p(x)v'(0) = \overline{\lambda} v(x), \quad U_1(v) = 0, \quad U_2(v) = 0. \tag{4}$$

Построим сначала характеристический определитель спектральной задачи. Представляя общее решение уравнения (1) по формуле $u(x,\lambda) = C_1 cos\sqrt{\lambda}x + C_2 sin\sqrt{\lambda}x$, и удовлетворяя его краевым условиям (2),(3), получаем линейную систему относительно коэффициентов C_k:

$$\begin{cases} C_1[sin\sqrt{\lambda}] + C_2[1 - cos\sqrt{\lambda}] = 0, \\ C_1\left[1 - cos\sqrt{\lambda} - \int_1^0 \overline{p(x)} cos\sqrt{\lambda}x dx\right] + C_2\left[-sin\sqrt{\lambda} - \int_1^0 \overline{p(x)} sin\sqrt{\lambda}x dx\right] = 0. \end{cases}$$

Ее определитель и будет характеристическим определителем задачи (1)-(3):

$$\Delta_1(\lambda) = \begin{vmatrix} sin\sqrt{\lambda} & 1 - cos\sqrt{\lambda} - \int_1^0 \overline{p(x)} cos\sqrt{\lambda}x dx \\ 1 - cos\sqrt{\lambda} & -sin\sqrt{\lambda} - \int_1^0 \overline{p(x)} sin\sqrt{\lambda}x dx \end{vmatrix} \tag{5}$$

Легко видеть, что характеристический определитель невозмущенной задачи (1)-(3) получается отсюда при $p(x) = 0$. Обозначим его через $\Delta_0(\lambda) = -2(1 - cos\sqrt{\lambda})$. Очевидно, что собственными значениями невозмущенной периодической задачи являются $\lambda_k^0 = (2k\pi)^2$, а собственными функциями $u_{k0}^0 = \sqrt{2}cos(2k\pi)x$, $u_{k1}^0 = \sqrt{2}sin(2k\pi)x$.

Функцию $p(x)$ представим в виде ряда Фурье по тригонометрической системе:

$$p(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k cos(2k\pi)x + b_k sin(2k\pi)x]. \tag{6}$$

Используя (6), найдем более удобное представление определителя $\Delta_1(\lambda)$. Для этого сначала вычислим входящие в (5) интегралы. Несложные вычисления показывают, что

$$\int_1^0 \overline{p(x)} cos\sqrt{\lambda}x dx = \overline{a_0}\frac{sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{[\overline{a_k}\sqrt{\lambda}sin\sqrt{\lambda} + \overline{b_k}2k\pi(cos\sqrt{\lambda} - 1)]}{\lambda - (2k\pi)^2},$$

$$\int_1^0 \overline{p(x)} sin\sqrt{\lambda}x dx = \overline{a_0}\frac{1 - cos\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{[\overline{a_k}\sqrt{\lambda}(1 - cos\sqrt{\lambda}) + \overline{b_k}2k\pi sin\sqrt{\lambda}]}{\lambda - (2k\pi)^2}.$$

Откуда стандартными преобразованиями определитель (5) приводится к виду:

$$\Delta_1(\lambda) = \Delta_0(\lambda)A(\lambda), \quad A(\lambda) = \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}\overline{b_k}\frac{2k\pi}{\lambda - (2k\pi)^2}\right]. \tag{7}$$

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 1. *Характеристический определитель задачи (1)-(3) с возмущенными краевыми условиями представим в виде (7), где $\Delta_0(\lambda)$ - характеристический определитель невозмущенной задачи, а b_k - коэффициенты разложения (6) функции $p(x)$ в тригонометрический ряд Фурье.*

В представлении (7) функция $A(\lambda)$ имеет полюса в точках $\lambda = \lambda_k^0$ первого порядка. Однако в этих же точках функция $\Delta_0(\lambda)$ имеет нули второго порядка. Поэтому функция $\Delta_1(\lambda)$, представленная по формуле (7) является целой аналитической функцией переменного λ.

Более просто характеристический определитель (7) выглядит в случае, когда $p(x)$ представляется в виде конечной суммы в (6). То есть, когда существует такой номер N, что $a_k = b_k = 0$ для всех $k > N$. В этом случае формула (7) принимает вид

$$\Delta_1(\lambda) = \Delta_0(\lambda)\left[1 + \sum_{k=1}^{N} \overline{b_k} \frac{2k\pi}{\lambda - (2k\pi)^2}\right] \tag{8}$$

Из этого частного случая формулы (7) несложно обосновать следующее

Следствие 1. *Для любых наперед заданных чисел - комплексного $\widehat{\lambda}$ и натурального $\widehat{m}$ всегда существует такая функция $p(x)$, что $\widehat{\lambda}$ будет являться собственным значением задачи (1)-(3) кратности $\widehat{m}$.*

Из анализа формулы (8) также легко видеть, что $\Delta_1(\lambda_k^0) = 0$ для всех $k > N$. То есть все собственные значения $\lambda_k^0, k > N$ невозмущенной периодической задачи являются собственными значениями возмущенной задачи (1)-(3). Также не трудно убедиться, что сохраняется и кратность собственных значений $\lambda_k^0, k > N$.

Более того, из условия ортогональности тригонометрической системы следует, что в этом случае $\int_1^0 \overline{p(x)} u_{kj}^0(x)dx = 0, j = \overline{0,1}, k > N$. Поэтому собственные функции $u_{kj}^0(x)$ периодической задачи при $k > N$ удовлетворяют краевым условиям (2),(3) и, следовательно, являются собственными функциями задачи (1)-(3). Значит в этом случае системы собственных функций задачи (1)-(3) и система собственных функций периодической задачи (образующая ортонормированный базис) отличаются друг от друга лишь по конечному числу первых членов. Следовательно, система собственных функций задачи (1)-(3) также образует базис Рисса в $L_2(0,1)$.

Очевидно, что множество функций $p(x)$, представимых в виде конечного ряда (6), является плотным в $L_1(0,1)$. Таким образом, доказана

Теорема 2. *Множество функций $p(x) \in L_1(0,1)$ таких, что система собственных функций задачи (1)-(3) образует базис Рисса в $L_2(0,1)$, является плотным в $L_1(0,1)$.*

Покажем теперь, что свойство базисности системы собственных функций задачи (1)-(3) является неустойчивым при сколь угодно малом интегральном возмущении краевого условия (3).

Теорема 3. *Множество функций $p(x) \in L_1(0,1)$ таких, что система собственных функций задачи (1)-(3) не образует даже обычного базиса в $L_2(0,1)$, является плотным в $L_1(0,1)$.*

Доказательство. Пусть в разложении (6) коэффициенты $b_k \neq 0$для всех достаточно больших k. Тогда из (7) не трудно видеть, что $\lambda = \lambda_k^0$ является простым собственным значением задачи (1)-(3). Легко проверить, что $u_k^1 = b_k cos(2k\pi)x - a_k sin(2k\pi)x$ являются собственными функциями задачи (1)-(3), соответствующими $\lambda_k^0 = (2k\pi)^2$. При этом собственной функцией сопряженной задачи (4), соответствующей собственному значению λ_k^0, является $v_k^1(x) = c_k cos(2k\pi)x$.

Так как собственные функции сопряженных задач образуют биортогональную систему, то имеем равенство единице скалярного произведения $(u_k^1, v_k^1) = 1$. Отсюда легко получаем $b_k\overline{c_k} = 2$. Поэтому

$$||u_k^1|| \cdot ||v_k^1|| = \sqrt{1 + \left|\frac{a_k}{b_k}\right|^2}. \tag{9}$$

Обозначим через $\sigma_N(x)$ - частичную сумму ряда Фурье (6). Очевидно, что множество функций, представимых в виде бесконечного ряда $\widetilde{p(x)} = \sigma_N(x) + \sum_{k=N+1}^{\infty} [\widetilde{a_k} cos(2k\pi)x + \widetilde{b_k} sin(2k\pi)x]$, где $\widetilde{a_k} = 2^{-k}$, $\widetilde{b_k} = 2^{-k}/k$, $k > N$, является плотным в $L_1(0,1)$. Но из (9) следует, что при таких функциях $\widetilde{p(x)}$ для соответствующих систем собственных функций прямой и сопряженной задач имеет место $\lim_{k\to\infty} ||u_k^1||||v_k^1|| = \infty$.

То есть не выполнено условие равномерной минимальности [7, с. 66] системы и, следовательно, она не образует даже обычного базиса в $L_2(0,1)$. Теорема 3 доказана.

Так как сопряженные операторы одновременно обладают свойством базисности Рисса корневых функций, то отсюда получаем

Следствие 2. *Множество P функций $p(x) \in L_1(0,1)$, для которых система собственных функций задачи (4) для нагруженного дифференциального уравнения образует базис Рисса в $L_2(0,1)$, всюду плотно в $L_1(0,1)$. Множество $L_1(0,1)\backslash P$ также всюду плотно в $L_1(0,1)$.*

Отметим, что в [8] исследованы вопросы устойчивости базисных свойств периодической задачи для нагруженного уравнения с нагрузкой вида $p(x)v(0)$.

Результаты настоящей работы, в отличие от [5], демонстрируют неустойчивость свойств базисности корневых функций задачи при интегральном возмущении краевых условий, являющихся регулярными, но не усиленно регулярными.

В заключение, автор выражает признательность д.ф.-м.н., профессору М.А. Садыбекову за плодотворное обсуждение результатов.

Список литературы

[1] *Маркус А.С.* О разложении по корневым векторам слабо возмущенного самосопряженного оператора // Докл. АН СССР. 1962. №3, Т.142. – С. 538 – 341.

[2] *Керимов Н.Б., Мамедов Х.Р.* О базисности Рисса корневых функций некоторых регулярных краевых задач // Матем.заметки. – 1998. – Т.64, Вып.4. – С. 448 – 563.

[3] *Макин А.С.* О нелокальном возмущении периодической задачи на собственные значения // Дифференц. уравнения. – 2006. №4, Т.42. – С. 560 – 562.

[4] *Ильин В.А., Крицков Л.В.* Свойства спектральных разложений, отвечающих несамосопряженным операторам // Функциональный анализ. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. – М.: ВИНИТИ, 2006. – Т.96. – С. 5 – 105.

[5] *Шкаликов А.А.* О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями // Вестник МГУ. Математика и механика. – 1982. – №6. – С. 12 – 21.

[6] *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. –М. – 1969.

[7] *под ред. Крейна* Функциональный анализ. –М. – 1972.

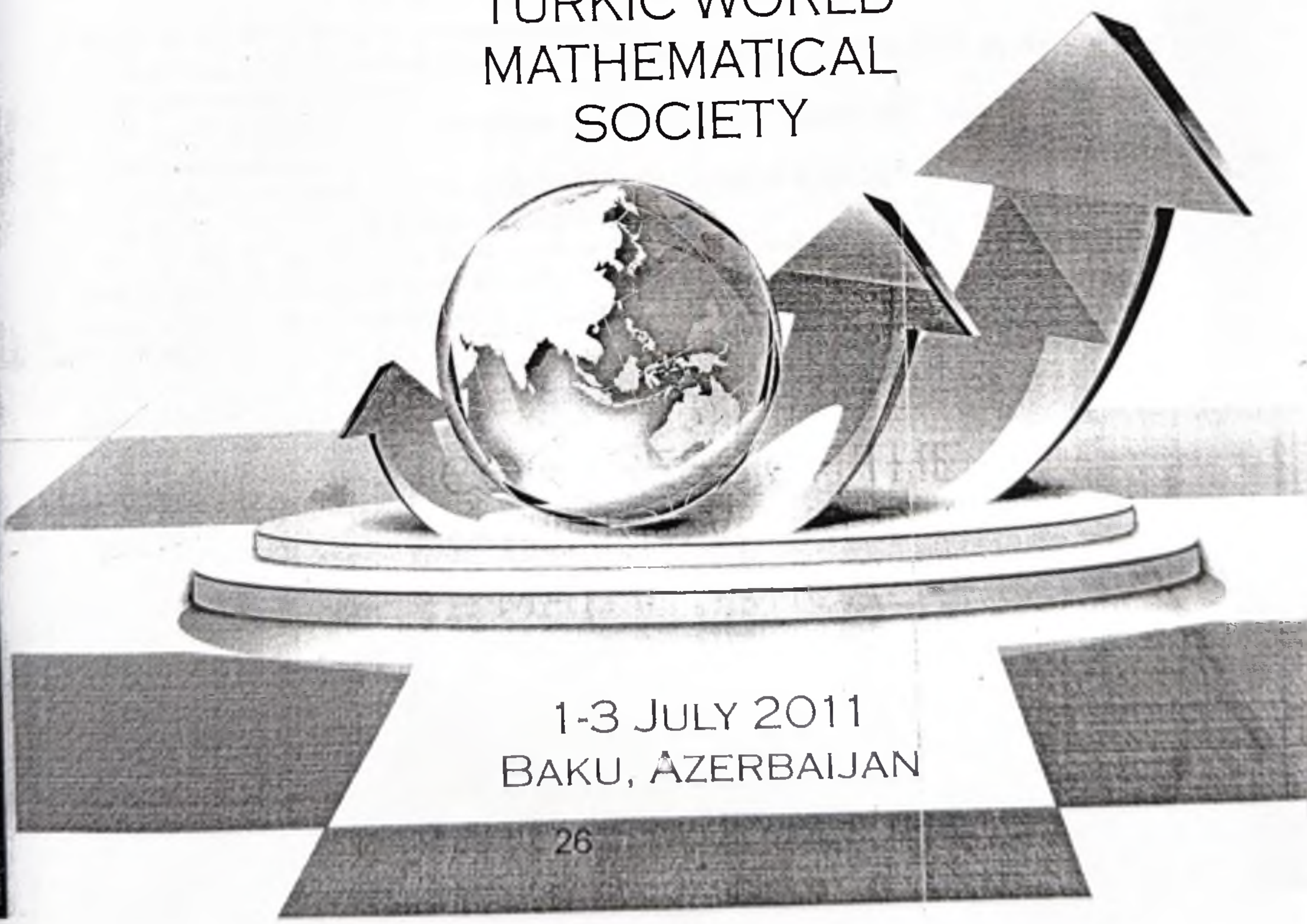
[8] *Иманбаев Н.С., Садыбеков М.А.* Базисные свойства корневых функций нагруженных дифференциальных операторов второго порядка // Доклады НАН РК. 2010. №2. – С. 11 – 13.

TURKIC WORLD
MATHEMATICAL SOCIETY

BOOK OF ABSTRACTS

IV

CONGRESS OF THE
TURKIC WORLD
MATHEMATICAL
SOCIETY



1-3 JULY 2011
BAKU, AZERBAIJAN

The 4th Congress of the Turkic World Mathematical Society (TWMS) Baku, Azerbaijan, 1-3 July, 2011

ROOT FUNCTIONS' BASIS PROPERTY OF SCHRÖDINGER OPERATOR NONLOCAL PERTURBATION OF BOUNDARY CONDITION

Nurlan S. Imanbaev
International Kazakh-Turkish University, Shymkent, Kazakhstan
e-mail:imanbaevnur@mail.ru

We consider the operator L given by the differential expression

$$L(y) = -y''(x) + q(x)y(x), 0 < x < 1$$

and by the boundary conditions

$$U_1(y) = 0,\ U_2(y) = \int_0^1 \overline{p(x)}y(x)dx,\ p(x) \in L_2(0,1),$$

where

$$U_j(y) = a_{j1}y'(0) + a_{j2}y'(1) + a_{j3}y(0) + a_{j4}y(1),\ \ j = 1, 2.$$

The question of the eigen and adjoint functions (EAF) basis of L with more generalized boundary conditions is positively resolved in [1], where Riesz basis with brackets is proved as the boundary conditions $U_1(y) = 0, U_2(y) = 0$ are regular by Birkhoff. And as long as an assumption of strongly regular Riesz basis EAF is proved. A double differentiation operator integral perturbation of the periodic boundary conditions is investigated in [2].

We consider the case when the boundary conditions are regular, but not strongly regular:

$$A_{12} = 0,\ A_{14} + A_{23} \neq 0,\ A_{14} + A_{23} = \pm(A_{13} + A_{24}).$$

Herein as usual $A_{ij} = a_{1i}a_{2j} - a_{1j}a_{2i}$ is denoted.

Theorem. *Let the unperturbed operator L_0 (in case $p(x) \equiv 0$) to have an EAF system forms Riesz basis in $L_2(0,1)$. Then:*

1) *set P of $p(x) \in L_2(0,1)$ functions such that the EAF system of L forms Riesz basis in $L_2(0,1)$ is dense in $L_2(0,1)$;*

2) *if $A_{14} = A_{23}, A_{34} = 0$ then $L_2(0,1)\backslash P$ is also dense in $L_2(0,1)$;*

3) *if $A_{14} = A_{23}, A_{34} \neq 0$ then $P = L_2(0,1)$;*

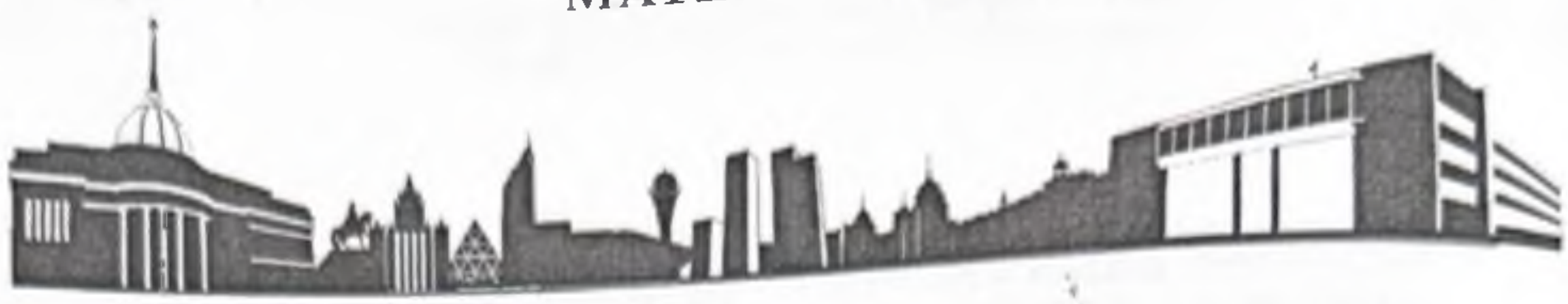
4) *if $A_{14} \neq A_{23}$ then the P set and $L_2(0,1)\backslash P$ are dense in $L_2(0,1)$. To ensure that the EAF system operator L is Riesz basis in $L_2(0,1)$ it is necessary and sufficient that all eigenvalues λ_k^1 except may be a finite number are multiple (in other words asymptotically multiples).*

References

[1] A.A. Shkalikov. On eigen functions basis of ordinary differential operators with integral boundary conditions // Bulletin of Moscow State University, No.6, 1982, pp. 12-21.

[2] A.S. Makin. On a nonlocal perturbation of the periodic problem on eigenvalues // Differential equations, Vol. No.4, 2006, pp. 560-562.

МАТЕМАТИКА



Н.С.Иманбаев

Об интегральном возмущении краевого условия спектральной задачи Самарского-Ионкина

(Южно-Казахстанский государственный педагогический институт, г. Шымкент)

Бұл мақалада толқытылған Самарский–Ионкин есебі түріндегі шеттік шарттармен берілген екі еселі дифференциалдық оператор үшін қойылған спектралдық есептің сипатталған анықтауышы құрылып, түбірлік функцияларының базистік қасиеттерінің шеттік шарттардағы интегралдың толқытылудан тәуелді өзгеретіндігі дәлелденген. Сондай-ақ, толқытылған Самарский–Ионкин есебінің меншікті мәндерінің еселігі көрсетіліп, сәйкес меншікті және қосымша алынған функцияларының базистік қасиеттерінің орнықты, орнықсыз болатын жағдайлары дәлелденген.

Хорошо известно, что система собственных функций оператора, заданного формально самосопряженным дифференциальным выражением, с произвольными самосопряженными краевыми условиями, обеспечивающими дискретный спектр, образует ортонормированный базис пространства . Во многих работах исследовался вопрос о сохранении свойств базисности при некотором (слабом в определенном смысле) возмущении исходного оператора. Например, для случая самосопряженного исходного оператора аналогичный вопрос исследовался в [1–3], а для несамосопряженного - в [4,5]. В настоящей работе рассматривается спектральная задача:

$$\ell(u) \equiv -u(x)'' = \lambda u(x), \qquad 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$U_1(u) \equiv u(0)' - u(1)' = 0, \tag{2}$$

$$U_2(u) \equiv u(0) = \int_0^1 \overline{p(x)} u(x) dx, \qquad p(x) \in L_2(0,1) \tag{3}$$

Если $p(x) \equiv 0$, то задача (1)-(3) называется задачей Самарского–Ионкина [4].

Вопрос о базисности корневых функций оператора с более общими интегральными краевыми условиями положительно решен в [6], где доказана базисность Рисса со скобками при условии регулярности по Биркгофу [7, с. 66–67] краевых условий невозмущенной задачи, а при дополнительном предположении усиленной регулярности - базисность Рисса. В нашем случае невозмущенные краевые условия (когда $p(x) \equiv 0$) являются регулярными, но не усиленно регулярными краевыми условиями. Поэтому для него не применимы результаты [6], а требуется дополнительное исследование.

Из [6] следует, что система собственных и присоединенных функций (СиПФ) задачи (1)-(3) полна и минимальна в $L_2(0,1)$. В настоящей работе мы построим характеристический определитель спектральной задачи (1)-(3). На основании полученной формулы делаются выводы о неустойчивости свойств базисности Рисса системы собственных функций задачи при интегральном возмущении краевого условия.

Одной из особенностей рассматриваемой задачи является то, что сопряженной к (1)-(3) является спектральная задача для нагруженного дифференциального уравнения:

$$l^*(\nu) = -\nu''(x) + p(x)\nu'(0) = \bar{\lambda}\nu(x), V_1(\nu) \equiv \nu'(1) = 0, V_2(\nu) \equiv \nu(0) - \nu(1) = 0 \tag{4}$$

Построим сначала характеристический определитель спектральной задачи. Для этого воспользуемся идеей работы [10]. Представляя общее решение уравнения (1) при $\lambda \neq 0$ по

формуле $u(x,\lambda) = C_1\cos\sqrt{\lambda}x + C_2\sin\sqrt{\lambda}x$, и удовлетворяя его краевым условиям (2), (3), получаем линейную систему относительно коэффициентов C_k:

$$\begin{cases} \sqrt{\lambda}C_1\sin\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda}C_2(1-\cos\sqrt{\lambda} = 0 \\ C_1\left[1-\int\limits_0^1 \overline{p(x)}\cos\sqrt{\lambda}xdx\right] - C_2\int\limits_0^1 \overline{p(x)}\sin\sqrt{\lambda}xdx = 0 \end{cases} \tag{5}$$

Ее определитель и будет характеристическим определителем задачи (1)-(3):

$$\Delta_1(\lambda) = \begin{vmatrix} \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} & \sqrt{\lambda}(1-\cos\sqrt{\lambda}) \\ 1-\int\limits_0^1 \overline{p(x)}\cos\sqrt{\lambda}xdx & -\int\limits_0^1 \overline{p(x)}\sin\sqrt{\lambda}xdx \end{vmatrix} \tag{6}$$

При $p(x) = 0$ получается характеристический определитель невозмущенной задачи (1)-(3). Обозначим его через $\Delta_0(\lambda) = 1-\cos\sqrt{\lambda}$. Число $\lambda_0^0 = 0$ является однократным собственным значением невозмущенной задачи (1)-(3), а $u_0(x) = +\sqrt{3}x$ - соответствующей собственной функцией. Остальные собственные значения невозмущенной задачи (1)-(3) являются двукратными: $\lambda_k^0 = (2k\pi)^2$, $k = 1,2,3,...$, а $u_{k0}^0 = \sqrt{2}\sin 2k\pi x$ - соответствующая им собственная, $u_{k1}^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}x\cos 2k\pi x$ – присоединенная функции. С учетом условия биортогональности $(u_{k1}^0, \nu_{k1}^0) = 1$ имеем $\nu_{k1}^0 = 4\sqrt{2}\cos 2k\pi x$ - собственную и $\nu_{k0}^0 = 2\sqrt{2}(1-x)\sin 2k\pi x$ – присоединенную функции сопряженной задачи к задаче Самарского-Ионкина.

Функцию $p(x)$ представим в виде биортогонального разложения в ряд Фурье по системе $\{\nu_{k0}^0, \nu_{k1}^0\}$:

$$p(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k0}\nu_{k0}^0 + \sum_{k=0}^{\infty} a_{k0}\nu_{k1}^0 = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k0}2\sqrt{2}(1-x)\sin 2k\pi x + \sum_{k=0}^{\infty} a_{k1}4\sqrt{2}\cos 2k\pi x \tag{7}$$

Используя (7), найдем более удобное представление определителя $\Delta_1(\lambda)$. Для этого сначала вычислим входящие в (6) интегралы. Несложные вычисления показывают, что

$$\int\limits_0^1 p(x)\cos\sqrt{\lambda}xdx = 4\sqrt{2\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\overline{a_{k1}}}{\lambda-(2k\pi)^2} + 2\sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k\pi\overline{a_{k0}}}{\lambda-(2k\pi)^2}\left[1-\frac{\sqrt{2\lambda}\sin\sqrt{\lambda}}{\lambda-(2k\pi)^2}\right]\right),$$

$$\int_0^1 \overline{p(x)}\sin\sqrt{\lambda}xdx = -2\sqrt{2\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{\overline{a_{\kappa 0}}}{\lambda-(2\kappa\pi)^2} - 2\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{2\kappa\pi\overline{a_{\kappa 0}}}{\lambda-(2\kappa\pi)^2} +$$

$$+4\sqrt{2\lambda}(1-\cos\sqrt{\lambda})\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{\overline{a_{\kappa 1}}}{\lambda-(2\kappa\pi)^2}.$$

Используя полученное, определитель (6) стандартными преобразованиями приводится к виду:

$$\Delta_1(\lambda) = \Delta_0(\lambda)\cdot A(\lambda), \qquad \text{где} \qquad A(\lambda) = \left[1+4\sqrt{2}\pi\sum_{\kappa=1}^{\infty}\overline{a_{\kappa 0}}\frac{\kappa}{\lambda-(2\kappa\pi)^2}\right] \tag{8}$$

Таким образом, доказана.

Теорема 1. *Характеристический определитель спектральной задачи (1)-(3) с возмущенными краевыми условиями представим в виде (8), где $\Delta_0(\lambda)$ –характеристический определитель невозмущенной спектральной задачи Самарского - Ионкина, $a_{\kappa 0}$ –коэффициенты Фурье биортогонального разложения (7) функции $p(x)$ по системе СиПФ сопряженной невозмущенной спектральной задачи Самарского - Ионкина.*

Функция $A(\lambda)$ из (8) имеет полюса первого порядка в точках $\lambda = \lambda_\kappa^0$, а функция $\Delta_0(\lambda)$ имеет нули второго порядка в этих же точках. Поэтому функция $\Delta_1(\lambda)$ представленная по формуле (8), является целой аналитической функцией переменного λ .

Из формулы (8) имеем две серии собственных значений возмущенной задачи (1)-(3):

$$\lambda_\kappa^{(1)} = \lambda_\kappa^0 = (2\kappa\pi)^2; \qquad \lambda_\kappa^{(2)} = \left[2\kappa\pi + \overline{a_{\kappa 0}}\left(\sqrt{2} + \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{\sqrt{\kappa}}\right)\right)\right]^2 .$$

Легко видеть, что если при некотором индексе j коэффициенты разложе-ния (7) $a_{j0} = 0$, то $\lambda_j^1 = \lambda_j^0$ является двукратным собственным значением воз-мущенной задачи (1)-(3).

Более просто характеристический определитель (8) выглядит в случае, когда $p(x)$ представляется в виде (7) с конечной первой суммой. То есть, когда существует такой номер N , что $a_{\kappa 0} = 0$ для всех $\kappa > N$ В этом случае фор-мула (8) принимает вид

$$\Delta_1(\lambda) = \Delta_0(\lambda) \cdot \left[1 + 4\sqrt{2}\pi \sum_{\kappa=1}^{N} \overline{a_{\kappa 0}} \frac{\kappa}{\lambda - (2\kappa\pi)^2}\right] \tag{9}$$

Из этого частного случая формулы (8) несложно обосновать следующее

Следствие1. Для любых наперед заданных чисел - комплексного λ и натурального всегда существует такая функция $p(x)$, что λ будет являться собственным значением задачи (1)-(3) кратности m .

Из анализа формулы (9) также легко видеть, что $\Delta_1(\lambda_\kappa^0)$ для всех $\kappa > N$. То есть все собственные значения $\lambda_\kappa^0, \kappa > N$ невозмущенной задачи Самарского - Ионкина являются собственными значениями возмущенной спектраль

ной задачи (1)-(3). Также не трудно убедиться, что сохраняется и кратность собственных значений $\lambda_k^0, k > N$.

Более того, из условия ортогональности $p(x) \perp u_{j0}^0, p(x) \perp u_{j1}^0$ при всех $j > N$ следует, что в этом случае $\int\limits_0^1 \overline{p(x)} u_{j0}^0(x)\,dx = \int\limits_0^1 \overline{p(x)} u_{j1}^0(x)\,dx = 0$. Поэтому собственные u_{j0}^0 и присоединенные u_{j1}^0 функции невозмущенной задачи Самарского - Ионкина, при всех $j > N$ удовлетворяют краевым условиям (2), (3) и, следовательно, являются собственными и присоединенными функциями возмущенной задачи (1)-(3). Значит в этом случае системы СиПФ возмущенной задачи (1)-(3) и система СиПФ невозмущенной задачи Самарского - Ионкина (образующая базис Рисса) отличаются друг от друга лишь по конечному числу первых членов. Следовательно, система СиПФ возмущенной задачи (1)-(3) также образует базис Рисса в $L_2(0,1)$.

Множество функций $p(x)$, представимых в виде конечного ряда (7), является плотным в $L_2(0,1)$. Таким образом, доказана

Теорема 2. *Множество функций $p(x) \in L_2(0,1)$, таких, что система СиПФ возмущенной задачи (1)-(3) образует базис Рисса в $L_2(0,1)$, является плотным в $L_2(0,1)$.*

Покажем теперь, что свойство базисности системы СиПФ возмущенной задачи (1)-(3) является неустойчивым при сколь угодно малом интегральном возмущении краевого условия (3).

Теорема 3. *Множество функций $p(x) \in L_2(0,1)$, таких, что система СиПФ возмущенной задачи (1)-(3)не образует даже обычного базиса в $L_2(0,1)$, является плотным в $L_2(0,1)$*

Доказательство. *Очевидно, что множество функций $p(x) \in L_2(0,1)$, представимых в виде ряда (7), коэффициенты которого асимптотически (то есть, начиная с некоторого номера) обладают свойством $a_{k0} \neq 0, a_{k1} \neq 0$, будет плотным в $L_2(0,1)$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что для таких функций $p(x)$ система СиПФ задачи не образует обычного базиса.*

Пусть j - достаточно большой номер, так, что .Тогда из (8) не трудно видеть, что $\lambda_j^0 = (2j\pi)^2$ является простым собственным значением задачи (1)-(3). Непосредственным вычислением легко получить, что соответст-вующей этому значению собственной функцией сопряженной задачи (4) является $\nu_j^1(x) = \sqrt{2}\cos(2j\pi x)$ и $\left\|\nu_j^1(x)\right\|^2 = 1$.

Найдем собственную функцию задачи (1)-(3). Для достаточно больших $\lambda = \lambda_j^0 = (2j\pi)^2$ первое уравнение системы (5) обращается в тождество, а второе уравнение преобразуется к виду

$$C_1\left[1 - \frac{\sqrt{2}}{4\pi}\frac{\overline{a_{j0}}}{j} + \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{k=1,k\neq j}^{\infty}\overline{a_{k0}}\frac{k}{j^2-k^2}\right] - C_2\frac{\overline{a_{j0}}}{\sqrt{2}} = 0.$$

Так как $a_{j0} \neq 0$, то отсюда выражаем C_2 через C_1 . Поэтому собственная функция задачи (1)-(3) имеет вид:

$$u_j^1(x) = C_1\left\{\cos(2j\pi x) + \frac{\sqrt{2}}{\overline{a_{j0}}}\left[1 - \frac{\sqrt{2}}{4\pi}\frac{\overline{a_{j0}}}{j} + \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{k=1,k\neq j}^{\infty}\overline{a_{k0}}\frac{k}{j^2-k^2}\right]\sin(2j\pi x)\right\}.$$

Константу C_1 выбираем из условия биортогональности $\left(u_j^1(x), v_j^1(x)\right) = 1$. Легко видеть, что $C_1 = \sqrt{2}$. Окончательно нашли собственную функцию задачи (1)-(3):

$$u_j^1(x) = \sqrt{2}\cos(2j\pi x) - \left[\frac{1}{\sqrt{2}j\pi} - \frac{2}{\overline{a_{j0}}}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{k=1,k\neq j}^{\infty}\overline{a_{k0}}\frac{k}{j^2-k^2}\right)\right] sin(2j\pi x)$$

Непосредственным вычислением находим ее норму в $L_2(0,1)$:

$$\|u_j^1(x)\|^2 = 1 + \frac{1}{2}\left|\frac{1}{\sqrt{2}j\pi} - \frac{2}{\overline{a_{j0}}}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{k=1,k\neq j}^{\infty}\overline{a_{k0}}\frac{k}{j^2-k^2}\right)\right|^2.$$

Из теоремы Юнга [9, теорема 276, с. 240] следует, что $\lim\limits_{j\to+\infty}\sum\limits_{k=1,k\neq j}^{\infty}\overline{a_{k0}}\frac{k}{j^2-k^2} = 0$, поэтому $\lim\limits_{j\to+\infty}\|u_j^1(x)\|^2 = 1 + 2\lim\limits_{j\to+\infty}\left|\frac{1}{a_{j0}}\right|^2 = +\infty$. Следовательно, $\lim\limits_{j\to\infty}\|u_j^1\|\cdot\|v_j^1\| = \infty$ То есть, не выполнено условие равномерной минимальности [8, с.66] системы СиПФ и, следовательно, она не образует даже обычного базиса в $L_2(0,1)$. Теорема 3 доказана.

Так как сопряженные операторы одновременно обладают свойством базисности Рисса корневых функций, то отсюда получаем

Следствие2. *Множество* P *функций* $p(x) \in L_2(0,1)$, *для которых система СиПФ задачи (4) для нагруженного дифференциального уравнения образует базис Рисса в* $L_2(0,1)$, *всюду плотно в* $L_2(0,1)$. *Множество* $L_2(0,1)/P$ *также всюду плотно* $L_2(0,1)$.

Результаты настоящей работы, в отличие от [6], демонстрируют неустойчивость свойств базисности корневых функций задачи при интегральном возмущении краевых условий, являющихся регулярными, но не усиленно регулярными.

ЛИТЕРАТУРА

1.Маркус А.С. О разложении по корненым векторам слабо возмущенного самосопряженнегого апереторат // Доклады АН ССР.1962.Т.142.№3.-С.538-541.

2.Керимов Н.Б., Мамедов Х.Р. О базисности Рисса корневых функций некоторых регулярных краевых задач // матем. заметки. 1988.Т.64.Вып.4-С.448-541.

3.Макин А.С.о нелокальном возмущении периодической задачи на сабственнеые значения // Дифференц. уравения.2006. Т.42.№4-С. 560-562.

4.Ильин В.А., Каицков Л.В. свойства спектральных разлоэжений, отвечающих несамосопряженным оператором // Функциональном анализ. Итоги науки и техники. Сер.соверем. мат. и ее прил. темат. Обз. Т.96.М.:ВИНИТИ. 2006.-С.5-105.

5.Иманбаиев Н. С., Садыбеков М.А. Об устойчивости свойства базисности одного типа задач на собственные значения при нелокальном возмущении краевого условия // Уфимский математический журнал. 2011.Т. 3. №2. -С. 28-33.

6.Шкалов А.А. О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральные краевыми условиями // Иестник МГУ. Математика и меканика.1982.№6.-С.12-21.

7.Наймарк М.А. Линейные дифференциальные оператор. М.: Наука,1969.-352с.

8.функциональный анализ (под ред.С.Г.Крейна). М.: Мир, 1972.

9.Харди Г.Г., литтльвуд Дж.Е, Полна г. неравенства. М.:ВК.1948.-456с.

10.Иманбаев Н.С, Садыбеков М.А. Характеристический определитель задачи длят обыкновенноше дифференциального оператора с интегральным возмущением краевого условия // Международиная конференция еренцальние уравнения и смежные вопросы посвященная 110-ой годовщине со дня рождения выдающегося математика И.Г. Петровского.(23 совместное заседание Московского математического общества и семинара им.И.Г. Петровского) 30 мая-4 нюня 2011. Сборник тезисов. М.: МГУ им. М.В. Ломаносова. -С. 220-221.

Иманбаев Н.С. Самарский-Ионкин спектральді есебінегі шекаралық шарттың интегралдық толқуы

Бұл мақалада толқытылған Самарский-Ионкин есебі түріндегі шеттік шарттармен берілген екі еселі дифференциалдық оператор үшін қойылған спектралдық есептің сипатталған анықтауышы құрылып, түбірлік функцияларының базистік қасиеттерінің шеттік шарттардағы интегралдық толқытылудан тәуелді өзгеретіндігі дәлелденген. Сондай-ақ, толқытылған Самарский-Ионкин есебінің меншікті мәндерінің еселігі көрсетіліп, сәйкес меншікті және қосымша алынған функцияларының базистік қасиеттерінің орнықты, орнықсыз болатын жақдайлары дәлелденген.

Imanbaev N.S.

An integral perturbation of the boundary condition of the Samara-Ionkin spectral problem

About the stability of basis property of one type of problems Samarski-Ionkin on the eigenvalues with nonlokal perturbation of boundary conditions. In the present note we consider a spectral problem basic properties of root functions of the loaded differential operators of the second order.

Поступила в редакцию 10.01.12

Рекомендована к печати 19.01.12

Қазақстан Республикасы білім және ғылым министрлігі
Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті
М.В. Ломоносов атындағы Мәскеу мемлекеттік
университетінің Қазақстандағы филиалы

"ФУНКЦИОНАЛДЫҚ АНАЛИЗ ЖӘНЕ ОНЫҢ ҚОЛДАНЫЛУЛАРЫ" ХАЛЫҚАРАЛЫҚ ҒЫЛЫМИ КОНФЕРЕНЦИЯСЫ

Астана, 2012 жылдың 2-5 қазаны

БАЯНДАМАЛАР ТЕЗИСТЕРІ

Астана - 2012

Здесь

$$AV(t,x) \equiv \sum_{i,j=1}^{n}(a_{ij}(x)V_{x_i}(t,x))_{x_j} - c(x)V(t,x)$$

эллиптический оператор;

$\varphi[\cdot], \psi_1(x), \psi_2(x), f[t,x,u(t,x)], a_{ij}(x), c(x), a(x)$ - заданные функции; $Q_T = Q \times (0,T)$; ν - вектор нормали; γ - граница области $Q \subset R^n$; $u(t,x)$ - функция управления из гильбертова пространства, T - фиксированный момент времени.

Введено понятие слабо обобщенного решения краевой задачи и установлено достаточное условие существования решения основной и сопряженной краевых задач, а также задачи нелинейной оптимизации.

РЕДУКЦИЯ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ОПЕРАТОРА КОШИ-РИМАНА С ОДНОРОДНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ К ИНТЕГРАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ

Н. С. Иманбаев

Международный Казахско-Турецкий Университет им.Ясауи,
Туркестан, Казахстан
imanbaevnur@mail.ru

В функциональном пространстве $C(|z| \leqslant 1)$ рассмотрим операторы K, порождаемые дифференциальной операцией Коши-Римана

$$K\omega(z) = \frac{\partial\omega(z)}{\partial\bar{z}} \tag{1}$$

на множестве $D(K) \subset \{\omega \in C(|z| \leqslant 1), \frac{\partial\omega(z)}{\partial\bar{z}} \in C(|z| < 1)\}$.

Считаем, что оператор K имеет непустое резольвентное множество $\rho(K)$. Не умоляя общности, предполагаем, что

$$0 \in \rho(K), \tag{2}$$

т.е. существует ограниченный оператор K^{-1}. В работе [1] полностью описано множество операторов K со свойством (2).

Задача А. Найти те комплексные значения $\lambda \in C$ - множество комплексных чисел, при которых операторное уравнение

$$K\omega(z) = \lambda\omega(z), \quad |z| < 1 \tag{3}$$

с однородными краевыми условиями

$$Re\omega(z) = 0, \quad |z| = 1, \tag{4}$$

$$Im\omega(0) = 0. \tag{5}$$

имеет ненулевые решения.

Итак, имеет место следующая

Теорема 1. Решение задачи (3),(4),(5) определяется по формуле

$$\omega(z) = \frac{e^{\lambda z}}{2\pi i}\oint_{|t|=1} u(t)\frac{t+z}{t-z}\frac{dt}{t} + iCe^{\lambda z} + u(z)e^{\lambda z},$$

причем вещественная функция $u(z)$ является решением интегрального уравнения

$$(e^{\lambda z} - e^{\bar{\lambda}}z)\cdot u(z) + \frac{e^{\lambda z} - e^{\bar{\lambda}}z}{2\pi i}\oint_{|t|=1}\frac{u(t)}{t-z}dt + \frac{e^{\lambda z} - e^{\bar{\lambda}}z}{2\pi i}\oint_{|t|=1} u(t)\frac{1}{t-z}\frac{z}{t}dt = 0$$

на окружности $|z| = 1$, константа C определяется из общего решения $Im\omega(0) = C = 0, z = 0$.

Список литературы

[1] Отелбаев М., Шыныбеков А.Н. О корректных задачах типа Бицадзе-Самарского // ДАН СССР. 1982. Т.265, №4. С.815-819.

FIRST INTERNATIONAL CONFERENCE ON ANALYSIS AND APPLIED MATHEMATICS

ICAAM 2012

Gumushane, Turkey *18 – 21 October 2012*

ABSTRACT BOOK

Wavelet-based prediction of crude oil prices
M. Mahmoudi, K. Nojoomi, A. Rahmani 90-91
Numerical solution of a time-fractional Navier–Stokes Equation with modified Riemann-Liouville derivative
M. Merdan, A. Gökdoğan 92-93
The Modified Simple Equation Method for Solving Some Nonlinear Evolution Equations
M.Mızrak, A.Ertaş 94-95
Application of Cross Efficiency in Stock Exchange
M. M. Kaleibara, S. Daneshvar 96
Application of the Trial Equation Method for some Nonlinear Evolution Equations
M. Odabasi, E. Misirli 97
Paranormality of Some Class Differential Operators for First Order
M. Sertbas, L. Cona 98
Oscillation Theorems for Second-Order Damped Dynamic Equation on Time Scales
M. T. Senel 99
On the fine spectrum of the Λ operator defined by a lambda matrix over the sequence space c_{0} and c
M. Yeşilkayagil, F. Başar 100
On Hadamard Type Integral Inequalities For Nonconvex Functions
M. Z. Sarikaya, H. Bozkurt, N. Alp 101-102
A geometrical approach of an optimal control problem governed by EDO
N. Driai 103
Existence of Local Solution for a Double Dispersive Bad Boussinesq-Type Equation
N. Dündar, N. Polat 104
A Perturbation Solution Procedure for a Boundary Layer Problem
N. Elmas, A. Ashyralyev, H. Boyaci 105-106
Solution of Differential Equations by Perturbation Technique Using any Time Transformation
N. Elmas, H. Boyaci 107-108
Aproximation Properties of a Generalization of Linear Positive Operators in C[0,A]
N.Gonul 109
Three-term Asymptotic Expansion for the Moments of the Ergodic Distribution of a Renewal-reward Process with Gamma Distributed Interference of Chance
N. Okur Bekar, R. Aliyev, T. Khaniyev 110
Blow up of a solution for a system of nonlinear higher-order wave equations with strong damping
N. Polat, E. Piskin 111
Reduction of spectral problem of Cauchy-Riemann operator with homogeneous boundary conditions to an integral equation
N.S.Imanbayev 112
A Note on Some Elementary Geometric Inequalities
O. Gercek, D. Caliskan, A. Sobucova, F. Cekic 113-114
Solving Crossmatching Puzzles Using Multi-Layer Genetic Algorithms
O. Kesemen, E. Ozkul 115
Generate Adaptive Quasi-Random Numbers
O. Kesemen, N. Jabbari 116
Polygonal Approximation of Digital Curve Using Artificial Bee Colony Optimization Algorithms
O. Kesemen, S. Vafaei 117
Generating Random Points from Arbitrary Distribution In Polygonal Areas
O. Kesemen, U. Unsal 118
Panoramic Image Mosaicing Using Multi-Object Artificial Bee Colony Optimization Algorithm
O. Kesemen, Y. Yeginoglu 119
Some Properties of a Sturm-Liouville-Type Problem and The Green Function
O. Kuzu, Y. Kuzu, M. Kadakal 120-121

Reduction of spectral problem of Cauchy-Riemann operator with homogeneous boundary conditions to an integral equation

N.S.Imanbayev

H.A.Jassavi IKTU, Turkestan, Kazakhstan

Abstract

In this paper the problem on the eigenvalues of the Cauchy-Riemann operator with homogeneous boundary conditions is reduced to an integral equation In the functional space $C(|z| \leq 1)$ we consider the operators generated by differential operation of the Cauchy-Riemann

$$K\omega(z) = \frac{\partial\omega(z)}{\partial\overline{z}},$$

where $z = x + iy, \overline{z} = x - iy, \frac{\partial}{\partial\overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ on the set

$$D(K) \subset \left\{\omega(z) \in C(|z| \leq 1), \frac{\partial\omega(z)}{\partial\overline{z}} \in C(|z| \leq 1)\right\}.$$

References

[1] Otelbayev M., and Shinibekov A.N., About the correct problems of Bitsadze-Samarskiy type, Reports of Academy of Sciences,USSR.-V.265, 4.-pp.815-819,1982.

[2] Mikhailets V.A., Spectral problems with general boundary conditions,Abstract of doct.of ph.-math, Kiev, 29 p,1989.

[3]Imanbaev N.S., and Kanguzhin B. E , and Kirgizbaev Zh. About Fredholm property of one spectral problem related to Cauchy-Riemann operator,Inter-institute collection of scientific proceedings, "Questions of stability, durability and controllability of the dynamic systems",Moscow: RGOTUPS, P. 54-59.2002

[4] Muskhelishvili N.I., Singular integral equations,Nauka Moscow, 511 p.1968.

[5] Bitsadze A.V., Fundamentals of theory of analytic functions of complex variable, Nauka, Moscow, 239, p.1969.

ISSN 1728-7901

Абай атындағы
Қазақ ұлттық педагогикалық университеті

Казахский национальный педагогический
университет имени Абая

ХАБАРШЫ
ВЕСТНИК

Серия «Физико-математические науки» • «Физика-математика ғылымдары» сериясы

№ 3 (43)
2013

Алматы

Индукция насыщения B_s достигается, когда поле в материале больше не в состоянии увеличиваться, даже если значение напряженности поля H продолжает возрастать. Поскольку H пропорциональна току, протекающему в обмотке возбуждения, а также числу ее витков (закон «амперов-витков»), то любое насыщение будет подавлять эффект увеличения тока.

Головки с ферритовыми сердечниками насыщаются достаточно быстро, поэтому они не могут вести запись на дорожках H_i C_o. Такие головки могут дать весьма неплохие результаты в записи, а также в считывании дорожек L_o C_o. Хотя эти головки сильно изнашивают магнитные носители, но обладают большой механической твердостью и потому имеют исключительно большой срок службы.

Заключение

В данной статье рассмотрены магнитные носители информации. Описаны основы магнитной записи, технические характеристики. Принципы работы и особенности применения магнитных карт.

1. Магнитные карты и ПК: Пер. С фр. - М.: ДМК Пресс, 2001. – 128 с.
2. ПК и чип-карты: Пер. С фр. - М.: ДМК Пресс, 2003. – 144с.
3. http:// card.su/chip_karty.htm Карты с чипами

УДК 517. 945

Н.С. Иманбаев

О ЗАДАЧЕ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ОПЕРАТОРА КОШИ-РИМАНА С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ТИПА БИЦАДЗЕ-САМАРСКОГО

(г.Туркестан, МКТУ им.А. Ясауи)

Бұл мақалада Бицадзе-Самарский типтес шекаралық шарттарымен берілген Коши-Риман дифференциалдық амалынан туындайтын оператордың меншікті мәндерін зерттеуге арналған есеп қарастырылады. Қойылған есептің квазисингулярлы иинтегралдық теңдеуге С.Г. Михлин мағынасындағы эквиваленттілігі дәлелденген. Коши-Риман операторы үшін қойылған спектралдық есептің үзіліссіз ядролы квазисингулярлы интегралдық теңдеуге редукциялануы көрсетілген.

В настоящей заметке рассматривается задача на собственные значение дифференциального оператора Коши-Римана с краевыми условиями типа Бицадзе-Самарского. Доказана, что исходная задача эквивалентна в смысле С.Г. Михлина, квазисингулярному интегральному уравнению с непрерывным ядром. Спектральная задача для оператора Коши-Римана редуцирована к квазисингулярному интегральному уравнению с непрерывным ядром.

In this paper we consider the problem on its own value of the differential Cauchy-Riemann equations with boundary conditions of Bitsadze-Samara. We prove that the original problem is equivalent in terms of SG Mikhlina, kvazisingulyarnomu integral equation with continuous kernel. The spectral problem for the Cauchy-Riemann kvazisingulyarnomu reduced to an integral equation with a continuous kernel.

Түйін сөздер: квазисингулярлы, редукциялау, спектр, меншікті мәндер, оператор, резольвенттік жиын.

Ключевые слова: квазисингулярное, редуцизрование, спектр, собственные значение, оператор, резольвентное множество.

Keywords: quasisingular, reducing, spectrum, eigenvalue, operator, resolvent set.

В функциональном пространстве $C(|z|\le 1)$ рассмотрим операторы К, порождаемые дифференциальной операцией Коши-Римана

$$K\omega(z)=\frac{\partial\omega(z)}{\partial\bar z}, \tag{а}$$

где $z=x+iy,\ \bar z=x-iy,\ \dfrac{\partial}{\partial\bar z}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}+i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$ на множестве

$$D(K)\subset\left\{\omega(z)\in C(|z|\le 1),\frac{\partial\omega}{\partial\bar z}\in C(|z|<1)\right\}.$$

Считаем, что оператор К имеет непустое резольвентное множество ρ(К). Не умоляя общности, предполагаем, что $0\in\rho(K)$, (в)
т.е. существует ограниченный оператор K^{-1}. В работе [1] полностью описано множество операторов {К} со свойством (в). Рассмотрим задачу на собственные значение дифференциального оператора Коши-Римана

$$K\omega(z)=\lambda\omega(z),\ |z|<1 \tag{1}$$

с граничными условиями типа Бицадзе-Самарского

$$\operatorname{Re}\omega(z)=\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi|=1}\frac{d\xi}{\xi-z}\cdot\oint\limits_{|\tau|=r<1}\frac{\lambda\cdot\omega(\tau)}{\tau-\xi}d\tau\right),\ |z|=1, \tag{2}$$

$$\operatorname{Im}\omega(0)=\operatorname{Im}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi|=1}\frac{d\xi}{\xi}\cdot\oint\limits_{|\tau|=r<1}\frac{\lambda\cdot\omega(\tau)}{\tau-\xi}d\tau\right), \tag{3}$$

где λ – спектральный параметр.

Постановка задачи. Найти те комплексные значения $\lambda\in C$ – множество комплексных чисел, при которых операторное уравнение $K\omega(z)=\lambda\omega(z)$, $|z|<1$ имеет ненулевые решения.

Общее решение дифференциального уравнения в частных производных имеет вид

$$\omega(z)=\Phi(z)\,e^{\lambda\bar z}, \tag{4}$$

где $\Phi(z)$ – голоморфная в круге $|z|<1$ функция. Действительно, умножая обе части (1) на $e^{\lambda\bar z}$, получим $e^{-\lambda\bar z}\dfrac{\partial\omega(z)}{\partial\bar z}-\lambda e^{-\lambda\bar z}\omega(z)=0$.

Так как $\dfrac{\partial e^{-\lambda\bar z}}{\partial\bar z}=-\lambda e^{-\lambda\bar z}$, имеем равенство $\dfrac{\partial}{\partial\bar z}(e^{-\lambda\bar z}\omega(z))=0$.

Отсюда следует, что произведение $e^{-\lambda\bar z}\omega(z)$ является голоморфной функцией в $|z|<1$. Голоморфная функция $\Phi(z)$ выражается по интегральной формуле Шварца через свою реальную часть следующим образом:

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi|=1}u(\xi)\frac{\xi+z}{\xi-z}\cdot\frac{d\xi}{\xi}+iC,\qquad |z|<1,$$

где $u(\xi)=\operatorname{Re}\Phi(\xi)$, $C=\operatorname{Im}\Phi(0)$. Вследствие чего формула (4) примет вид

$$\omega(z)=\frac{e^{\lambda\bar z}}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi|=1}u(\xi)\frac{\xi+z}{\xi-z}\cdot\frac{d\xi}{\xi}+iCe^{\lambda\bar z},\qquad |z|<1.$$

Последняя формула является общим решением уравнения (1), которое подставляем в граничное условие (2). Используя формулу Сохоцкого-Племеля [2, стр. 55], найдем граничные значения решения при $|z|=1$

$$\omega(z)=\frac{e^{\lambda\bar z}}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi|=1}u(\xi)\frac{\xi+z}{\xi-z}\cdot\frac{d\xi}{\xi}+iCe^{\lambda\bar z}+u(z)e^{\lambda\bar z}.$$

Тогда имеем соотношение

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{e^{\lambda\bar z}}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi|=1}u(\xi)\frac{\xi+z}{\xi-z}\cdot\frac{d\xi}{\xi}+iCe^{\lambda\bar z}+u(z)e^{\lambda\bar z}\right\}=$$

$$=\operatorname{Re}\left\{\frac{e^{\lambda\bar z}}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi|=1}\frac{d\xi}{\xi-z}\cdot\oint\limits_{|\tau|=r<1}\frac{\lambda d\tau}{\tau-\xi}\cdot\frac{e^{\lambda\bar\tau}}{2\pi i}\oint\limits_{|\theta|=1}u(\theta)\frac{\theta+\tau}{\theta-\tau}\cdot\frac{d\theta}{\theta}+\right.$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi|=1}\frac{d\xi}{\xi-z}\cdot\oint\limits_{|\tau|=r<1}\frac{\lambda d\tau}{\tau-\xi}i\cdot Ce^{\lambda\bar\tau}+\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi|=1}\frac{d\xi}{\xi-z}\cdot\oint\limits_{|\tau|=r<1}\frac{\lambda d\tau}{\tau-\xi}\cdot u(\tau)e^{\lambda\bar\tau}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi|=1}\frac{d\xi}{\xi-z}\cdot\oint\limits_{|\tau|=r<1}\frac{\lambda d\tau}{\tau-\xi}\cdot\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|t|=1}\frac{dt}{t-\tau}\cdot\frac{e^{\lambda\bar t}}{2\pi i}\oint\limits_{|v|=1}u(\mathrm{v})\frac{\mathrm{v}+\mathrm{t}}{\mathrm{v}-\mathrm{t}}\cdot\frac{d\mathrm{v}}{\mathrm{v}}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi|=1}\frac{d\xi}{\xi-z}\cdot\oint\limits_{|\tau|=r<1}\frac{\lambda d\tau}{\tau-\xi}\cdot\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|t|=1}\frac{dt}{t-\tau}i\cdot Ce^{\lambda\bar t}+\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi|=1}\frac{d\xi}{\xi-z}\cdot\oint\limits_{|\tau|=r<1}\frac{\lambda d\tau}{\tau-\xi}\times$$

$$\left.\times\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|t|=1}e^{\lambda\bar t}u(t)\frac{dt}{t-\tau}\right\},\quad |z|=1.$$

В силу формулы Пуанкаре-Бертрана [2, стр. 102], поменяв очередность интегрирования, последнее равенство перепишем в виде

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{e^{\lambda\bar z}}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi|=1}u(\xi)\frac{\xi+z}{\xi-z}\cdot\frac{d\xi}{\xi}+iCe^{\lambda\bar z}+u(z)e^{\lambda\bar z}\right\}=$$

$$=\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\theta|=1}u(\theta)\frac{d\theta}{\theta}+\oint\limits_{|\xi|=1}\frac{\lambda d\xi}{\xi-z}\cdot\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\tau|=r<1}e^{\lambda\bar\tau}\frac{\theta+\tau}{\theta-\tau}\cdot\frac{d\tau}{\tau-\xi}+\right.$$

$$+\frac{i\lambda C}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi|=1}\frac{\lambda d\xi}{\xi-z}\oint\limits_{|\tau|=r<1}e^{\lambda\bar\tau}\frac{d\tau}{\tau-\xi}+\frac{\lambda}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi|=1}\frac{\lambda d\xi}{\xi-z}\cdot\oint\limits_{|\tau|=r<1}e^{\lambda\bar\tau}u(\tau)\frac{d\tau}{\tau-\xi}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|v|=1}u(\mathrm{v})\frac{d\mathrm{v}}{\mathrm{v}}\cdot\oint\limits_{|\xi|=1}\frac{\lambda d\xi}{\xi-z}\cdot\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\tau|=r<1}\frac{d\tau}{\tau-\xi}\cdot\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|t|=1}e^{\lambda\bar t}\frac{\mathrm{v}+\mathrm{t}}{\mathrm{v}-\mathrm{t}}\cdot\frac{dt}{t-\tau}+$$

$$+\frac{i\lambda C}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi|=1}\frac{\lambda d\xi}{\xi-z}\oint\limits_{|\tau|=r<1}\frac{d\tau}{\tau-\xi}\cdot\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|t|=1}e^{\lambda i}\frac{dt}{t-\tau}+\frac{\lambda}{2\pi i}\oint\limits_{|t|=1}e^{\lambda i}u(t)dt\times$$

$$\times\oint\limits_{|\xi|=1}\frac{\lambda d\xi}{\xi-z}\cdot\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\tau|=r<1}\frac{d\tau}{\tau-\xi}\cdot\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\tau|=r<1}\frac{d\tau}{(\tau-\xi)(t-\tau)}\Bigg\},\ |z|=1. \qquad (10)$$

Так как $\tau\cdot\bar{\tau}=r^2$, $\bar{\tau}=\frac{r^2}{\tau}$, $\bar{t}=\frac{1}{t}$, $\bar{\nu}=\frac{1}{\nu}$, $\bar{z}=\frac{1}{z}$, $\bar{\theta}=\frac{1}{\theta}$, $\bar{\xi}=\frac{1}{\xi}$, то с помощью вычетов можно вычислить интегралы из (10), не содержащую неизвестную функцию $u(\xi)$. Имеет место следующая лемма.

Лемма. Вычет в особой точке $\tau=0$ от интеграла

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\tau|=r<1}e^{\lambda\bar{\tau}}\frac{d\tau}{\tau-A}$$

вычисляется по формуле

$$\operatorname*{res}_{\tau=0}\frac{e^{\lambda\bar{\tau}}}{\tau-A}=\frac{-\lambda r^2}{A}-\frac{-\lambda^2r^4}{2!A^2}-\frac{-\lambda^3r^6}{3!A^3}-\ldots=1-e^{\frac{\lambda r^2}{A}}.$$

На основе этой леммы вычислим вычеты подынтегральных функций, которые имеют особенности в точке $\tau=0$. Вычеты в других особых точках подынтегральных функций легко вычисляются, так как особенности имеют вид полюсов первого порядка

$$I_1=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\theta|=1}u(\theta)\frac{d\theta}{\theta}+\oint\limits_{|\xi|=1}\frac{d\xi}{\xi-z}\cdot\oint\limits_{|\tau|=r<1}e^{\lambda\bar{\tau}}\frac{\theta+\tau}{\theta-\tau}\cdot\frac{d\tau}{\tau-\xi}=$$

$$=-\pi i\oint\limits_{|\theta|=1}u(\theta)\frac{d\theta}{\theta}\left[\frac{2\theta}{\theta-z}\cdot\left(e^{\frac{\lambda r^2}{\theta}}-1\right)-\frac{\theta+z}{\theta-z}\left(e^{\frac{\lambda r^2}{z}}-1\right)\right],$$

$$I_2=iC\oint\limits_{|\xi|=1}\frac{d\xi}{\xi-z}\cdot\oint\limits_{|\tau|=r<1}e^{\lambda\bar{\tau}}\frac{\theta+\tau}{\theta-\tau}\cdot\frac{d\tau}{\tau-\xi}=2\pi^2iC\left(e^{\frac{\lambda r^2}{\theta}}-1\right),$$

$$I_3=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\nu|=1}u(\nu)\frac{d\nu}{\nu}\oint\limits_{|\xi|=1}\frac{d\xi}{\xi-z}\cdot\oint\limits_{|\tau|=r<1}\frac{d\tau}{\tau-\xi}\cdot\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|t|=1}e^{\lambda\bar{t}}\frac{\nu+t}{\nu-t}\frac{dt}{t-\tau}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\nu|=1}u(\nu)\frac{d\nu}{\nu}\oint\limits_{|\xi|=1}\frac{d\xi}{\xi-z}\cdot\oint\limits_{|\tau|=r<1}\frac{d\tau}{\tau-\xi}\cdot\left\{\frac{2\nu}{\nu-t}\cdot\left(e^{\frac{\lambda}{\nu}}-1\right)-\right.$$

$$\left.-\frac{\nu+\tau}{\nu-\tau}\cdot\left(e^{\frac{\lambda}{\tau}}-1\right)+\frac{\nu+\tau}{\nu-\tau}\cdot e^{\frac{\lambda}{\tau}}-\frac{2\nu}{\nu-\tau}\cdot e^{\frac{\lambda}{\nu}}\right\}=0,$$

$$I_4=\lambda iC\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi|=1}\frac{d\xi}{\xi-z}\cdot\oint\limits_{|\tau|=r<1}\frac{d\tau}{\tau-\xi}\cdot\oint\limits_{|t|=1}e^{\lambda\bar{t}}\frac{dt}{t-\tau}=$$

$$= iC\frac{\lambda}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi|=1}\frac{d\xi}{\xi-z}\cdot\oint\limits_{|\tau|=r<1}\frac{d\tau}{\tau-\xi}\cdot 2\pi i\left[\left(1-e^{\frac{\lambda}{\tau}}\right)+e^{\frac{\lambda}{\tau}}\right]=0,$$

$$I_5=\frac{\lambda}{2\pi i}\oint\limits_{|t|=1}e^{\lambda\bar{t}}u(t)dt\oint\limits_{|\xi|=1}\frac{\lambda d\xi}{\xi-z}\cdot\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\tau|=r<1}\frac{d\tau}{(\tau-\xi)(t-\tau)}=0.$$

Итак, равенство (10) перепишется в виде

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{e^{\lambda\bar{z}}}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi|=1}u(\xi)\frac{\xi+z}{\xi-z}\cdot\frac{d\xi}{\xi}+iCe^{\lambda\bar{z}}+u(z)e^{\lambda\bar{z}}\right\}=$$

$$=\mathrm{Re}\frac{\lambda}{2\pi i}\left\{-\pi i\oint\limits_{|\theta|=1}u(\theta)\frac{d\theta}{\theta}\cdot\left[\frac{2\theta}{\theta-z}\cdot\left(e^{\frac{\lambda r^2}{\theta}}-1\right)-\frac{\theta+z}{\theta-z}\left(e^{\frac{\lambda r^2}{z}}-1\right)\right]+\right.$$

$$\left.+2\pi^2 iC\left(1-e^{\frac{\lambda r^2}{z}}\right)+\oint\limits_{|\xi|=1}\frac{\lambda d\xi}{\xi-z}\oint\limits_{|\tau|=r<1}\frac{e^{\lambda\tau}}{\tau-\xi}u(\tau)d\tau\right\},\ |z|=1. \qquad (11)$$

Распишем вещественную часть комплексного числа в виде полусуммы комплексного числа и его сопряженного, тогда приходим к соотношению при $|z|=1$:

$$\frac{e^{\lambda\bar{z}}}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi|=1}u(\xi)\frac{\xi+z}{\xi-z}\cdot\frac{d\xi}{\xi}-\frac{e^{\bar{\lambda}z}}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi|=1}u(\xi)\frac{\xi+z}{\xi-z}\cdot\frac{d\xi}{\xi}+iCe^{\lambda\bar{z}}-iCe^{\bar{\lambda}z}+u(z)e^{\lambda\bar{z}}+u(z)e^{\bar{\lambda}z}=$$

$$=\frac{-\lambda}{2}\oint\limits_{|\xi|=1}u(\xi)\frac{d\xi}{\xi-z}\cdot 2e^{\frac{\lambda r}{\xi}}+\bar{\lambda}\oint\limits_{|\xi|=1}e^{\bar{\lambda}r^2\xi}u(\xi)\frac{1}{\frac{z-\xi}{\xi\cdot z}}\cdot(-1)\frac{d\xi}{\xi^2}+\lambda\oint\limits_{|\xi|=1}u(\xi)\frac{d\xi}{\xi-z}+$$

$$+\bar{\lambda}\oint\limits_{|\xi|=1}u(\xi)\frac{1}{\frac{z-\xi}{\xi\cdot z}}\cdot(-1)\frac{d\xi}{\xi^2}+\frac{\lambda}{2}\oint\limits_{|\xi|=1}u(\xi)\frac{\xi+z}{\xi-z}\cdot\frac{d\xi}{\xi}\cdot e^{\lambda r^2\bar{z}}+\frac{\bar{\lambda}}{2}\oint\limits_{|\xi|=1}u(\xi)\frac{\xi+z}{\xi-z}\cdot\frac{d\xi}{\xi}\cdot e^{\bar{\lambda}r^2 z}-$$

$$-\frac{\lambda}{2}\oint\limits_{|\xi|=1}u(\xi)\frac{\xi+z}{\xi-z}\cdot\frac{d\xi}{\xi}+\frac{\bar{\lambda}}{2}-\pi\lambda Ce^{\lambda r^2\bar{z}}+\pi\bar{\lambda}Ce^{\bar{\lambda}r^2 z}+\pi\lambda C+\pi\bar{\lambda}C+$$

$$+\frac{\lambda}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi|=1}\frac{\lambda d\xi}{\xi-z}\oint\limits_{|\tau|=r<1}\frac{e^{\lambda\bar{\tau}}}{\tau-\xi}u(\tau)d\tau+\frac{\bar{\lambda}}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi|=1}\frac{1}{\frac{\xi-z}{\xi z}}\cdot(-1)\frac{d\xi}{\xi^2}\oint\limits_{|\tau|=r<1}\frac{e^{\bar{\lambda}\tau}}{\frac{r^2}{\tau}-\frac{1}{\xi}}u(\tau)\frac{-r^2}{\tau^2}d\tau.$$

Последнее соотношение преобразуем к виду

$$\frac{e^{\lambda\bar{z}}-e^{\bar{\lambda}z}}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi|=1}u(\xi)\frac{\xi+z}{\xi-z}\cdot\frac{d\xi}{\xi}+iC(e^{\lambda\bar{z}}-e^{\bar{\lambda}z})+(e^{\lambda\bar{z}}+e^{\bar{\lambda}z})u(z)=$$

$$=-\lambda\oint\limits_{|\xi|=1}\frac{e^{\lambda r^2\bar{\xi}}}{\xi-z}u(\xi)d\xi+\bar{\lambda}\oint\limits_{|\xi|=1}\frac{e^{\bar{\lambda}r^2\xi}}{\xi-z}\cdot\frac{z}{\xi}u(\xi)d\xi+\lambda\oint\limits_{|\xi|=1}\frac{1}{\xi-z}u(\xi)d\xi+$$

$$+\bar{\lambda}\oint\limits_{|\xi|=1}\frac{1}{\xi-z}\cdot\frac{z}{\xi}u(\xi)d\xi+\left(\frac{\lambda}{2}e^{\lambda r^2\bar{z}}+\frac{\bar{\lambda}}{2}e^{\bar{\lambda}r^2 z}-\frac{\lambda}{2}+\frac{\bar{\lambda}}{2}\right)\oint\limits_{|\xi|=1}u(\xi)\frac{\xi+z}{\xi-z}\cdot\frac{d\xi}{\xi}+$$

$$+\pi C(-\lambda e^{\lambda r^2\bar{z}}+\bar{\lambda}e^{\bar{\lambda}r^2 z}+\lambda+\bar{\lambda})+\frac{\lambda}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi|=1}\cdot\frac{d\xi}{\xi-z}\oint\limits_{|\tau|=r<1}\frac{e^{\lambda\bar{\tau}}}{\tau-\xi}u(\tau)d\tau-$$

$$-\frac{\bar{\lambda}}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi|=1}\cdot\frac{1}{\xi-z}\cdot\frac{z}{\xi}d\xi\oint\limits_{|\tau|=r<1}\frac{e^{\bar{\lambda}\tau}}{\tau-r^2\xi}\cdot\frac{\xi r^2}{\tau}u(\tau)d\tau,\ |z|=1.$$

Выделяя сингулярную часть, полученное соотношение запишем в виде канонической формы

$$(e^{\lambda\bar{z}}+e^{\bar{\lambda}z})u(z)+\frac{e^{\lambda\bar{z}}-e^{\bar{\lambda}z}-(\lambda+\bar{\lambda})\pi i}{2}\cdot\frac{1}{\pi i}\oint\limits_{|\xi|=1}\frac{u(\xi)}{\xi-z}d\xi+$$

$$+\oint\limits_{|\xi|=1}u(\xi)\left\{\frac{e^{\lambda\bar{z}}-e^{\bar{\lambda}z}}{2\pi i}\cdot\frac{1}{\xi-z}\cdot\frac{z}{\xi}+\frac{\lambda e^{\lambda r^2\bar{\xi}}}{\xi-z}-\frac{\bar{\lambda}e^{\bar{\lambda}r^2\xi}}{\xi-z}\cdot\frac{z}{\xi}-\frac{\bar{\lambda}}{\xi-z}\cdot\frac{z}{\xi}-\frac{\bar{\lambda}-\lambda}{2}\frac{1}{\xi-z}\cdot\frac{z}{\xi}-\right.$$

$$\left.-\frac{\lambda e^{\lambda r^2\bar{z}}+\bar{\lambda}e^{\bar{\lambda}r^2 z}}{2}\frac{1}{\xi-z}\cdot\frac{z}{\xi}\right\}d\xi+C(ie^{\lambda\bar{z}}-ie^{\bar{\lambda}z}+\pi\lambda e^{\lambda r^2\bar{z}}-\pi\bar{\lambda}e^{\bar{\lambda}r^2 z}-\pi\lambda-\pi\bar{\lambda})-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi|=1}\cdot\frac{d\xi}{\xi-z}\left\{\oint\limits_{|\tau|=r<1}\frac{\lambda e^{\lambda\bar{\tau}}}{\tau-\xi}\cdot u(\tau)d\tau-\frac{z}{\xi}\oint\limits_{|\tau|=r<1}\frac{\bar{\lambda}e^{\bar{\lambda}\tau}}{\tau-r^2\xi}\cdot\frac{\xi r^2}{\tau}\cdot u(\tau)d\tau\right\}=0,\ |z|=1. \quad (12)$$

Для того, чтобы исключить C из (12) используем граничное условие (8). Вычислим интегралы, входящие в состав полученного равенства, после использования граничного условия (8) и не содержащие неизвестную функцию $u(\xi)$. Аналогично, подставляя полученные значения интегралов и группируя подобные члены, для вещественной константы получим формулу

$$(e^{\lambda\bar{z}}+e^{\bar{\lambda}z})u(z)-\frac{(\lambda+\bar{\lambda})\pi i-e^{\lambda\bar{z}}-e^{\bar{\lambda}z}}{2}\cdot\frac{1}{\pi i}\oint\limits_{|\xi|=1}\frac{u(\xi)}{\xi-z}d\xi+$$

$$+\oint\limits_{|\xi|=1}u(\xi)\left\{\frac{1}{\xi}(\lambda+\bar{\lambda})-\lambda e^{\lambda r^2\bar{\xi}}-\bar{\lambda}e^{\bar{\lambda}r^2\xi}\cdot\left(i(e^{\lambda\bar{z}}-e^{\bar{\lambda}z})+\pi(\lambda e^{\lambda r^2\bar{z}}-\bar{\lambda}e^{\bar{\lambda}r^2 z}-\lambda+\bar{\lambda})\right)+\right.$$

$$+\frac{\lambda e^{\frac{\lambda r^2}{\xi}}}{\xi-z}-\frac{1}{\xi-z}\cdot\frac{z}{\xi}\cdot\left(\bar{\lambda}e^{\bar{\lambda}r^2\xi}+\bar{\lambda}+\frac{\bar{\lambda}-\lambda}{2}-\frac{e^{\lambda\bar{z}}-e^{\bar{\lambda}z}}{2\pi i}\right)-\left.\frac{\lambda e^{\lambda r^2\bar{z}}-\bar{\lambda}e^{\bar{\lambda}r^2 z}}{2}\frac{\xi+z}{\xi-z}\cdot\frac{1}{\xi}\right\}d\xi+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi|=1}\frac{d\xi}{\xi}\left[\oint\limits_{|\tau|=r<1}u(\tau)\left(\frac{\lambda e^{\lambda\bar{\tau}}}{\tau-\xi}+\frac{\xi r^2}{\tau}\cdot\frac{\lambda e^{\bar{\lambda}\tau}}{\tau-r^2\xi}\right)dt\right]\cdot\left(i(e^{\lambda\bar{z}}-e^{\bar{\lambda}z})\right)-$$

$$-\pi\left(\bar{\lambda}+\lambda+\bar{\lambda}e^{\bar{\lambda}r^2 z}-\lambda e^{\lambda r^2\bar{z}}\right)-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi|=1}\frac{d\xi}{\xi-z}\cdot\left\{\oint\limits_{|\tau|=r<1}u(\tau)\left(\frac{\lambda e^{\lambda\bar{\tau}}}{\tau-\xi}-\right.\right.$$

$$-\frac{z}{\xi}\cdot\frac{\xi r^2}{\tau}\cdot\frac{\lambda e^{\bar\lambda\tau}}{\tau-r^2\xi}\Bigg)d\tau\Bigg\}=0,\quad |z|=1. \qquad (13)$$

Итак, задача (1)-(3) редуцирована к квазисингулярному интегральному уравнению (13). Этот факт сформулируем в следующей теореме. Основной результат настоящей заметки:

Теорема. Решение задачи (1)-(3) определяется по формуле

$$\omega(z)=\frac{e^{\lambda\bar z}}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi|=1}u(\xi)\frac{\xi+z}{\xi-z}\cdot\frac{d\xi}{\xi}+iCe^{\lambda\bar z}+u(z)e^{\lambda\bar z},$$

причем для вещественной функции $u(z)$ на окружности $|z|=1$ справедливо следующее квазисингулярное интегральное уравнение

$$a(z)u(z)-\frac{b(z)}{\pi i}\oint\limits_{|\xi|=1}\frac{u(\xi)}{\xi-z}d\xi+\oint\limits_{|\xi|=1}H(z,\xi)u(\xi)d\xi+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi|=1}\frac{d\xi}{\xi}\left(i(e^{\lambda\bar z}-e^{\bar\lambda z})-\pi\left(\bar\lambda+\lambda+\bar\lambda e^{\bar\lambda r^2 z}-\lambda e^{\lambda r^2\bar z}\right)\right)\times$$

$$\times\left[\oint\limits_{|\tau|=r<1}u(\tau)\left(\frac{\lambda e^{\lambda\bar\tau}}{\tau-\xi}+\frac{\xi r^2}{\tau}\cdot\frac{\bar\lambda e^{\bar\lambda\tau}}{\tau-r^2\xi}\right)\cdot d\tau\right]-\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi|=1}\frac{d\xi}{\xi-z}\times$$

$$\times\left\{\left[\oint\limits_{|\tau|=r<1}u(\tau)\left(\frac{\lambda e^{\lambda\bar\tau}}{\tau-\xi}+\frac{\xi r^2}{\tau}\cdot\frac{\bar\lambda e^{\bar\lambda\tau}}{\tau-r^2\xi}\right)\cdot d\tau\right]\right\}=0\quad |z|=1,$$

где $$a(z)=e^{\lambda\bar z}+e^{\bar\lambda z},\ b(z)=\frac{(\lambda+\bar\lambda)\pi i-e^{\lambda\bar z}+e^{\bar\lambda z}}{2},$$

$$H(z,\xi)=\left(i(e^{\lambda\bar z}-e^{\bar\lambda z})-\pi(\lambda e^{\lambda r^2\bar z}-\bar\lambda e^{\bar\lambda r^2 z}-\bar\lambda-\lambda\right)\cdot\frac{1}{\xi}\Big((\lambda+\bar\lambda)-$$

$$-\lambda e^{\lambda r^2\bar\xi}-\bar\lambda e^{\bar\lambda r^2\xi}\Big)-\frac{1}{\xi-z},\ \frac{z}{\xi}\left(\bar\lambda e^{\bar\lambda r^2\xi}+\frac{\bar\lambda-\lambda}{2}+\bar\lambda-\frac{e^{\lambda\bar z}+e^{\bar\lambda z}}{2\pi i}\right)+$$

$$+\frac{\lambda e^{\lambda r^2\bar\xi}}{\xi-z}-\frac{\lambda e^{\lambda r^2\bar z}+\bar\lambda e^{\bar\lambda r^2\xi}}{2}\cdot\frac{\xi+z}{\xi-z}\cdot\frac{1}{\xi},$$

$H(z,\xi)$ – непрерывное ядро.

Константа C из общего решения представим в виде

$$C=\operatorname{Im}\left\{\lambda\oint\limits_{|\xi|=1}u(\xi)(1-e^{\lambda r^2/\xi}\frac{d\xi}{\xi}+\frac{\lambda}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi|=1}\frac{d\xi}{\xi}\cdot\oint\limits_{|\tau|=r<1}\frac{e^{\lambda\bar\tau}}{\tau-\xi}u(\tau)d\tau\right\}.$$

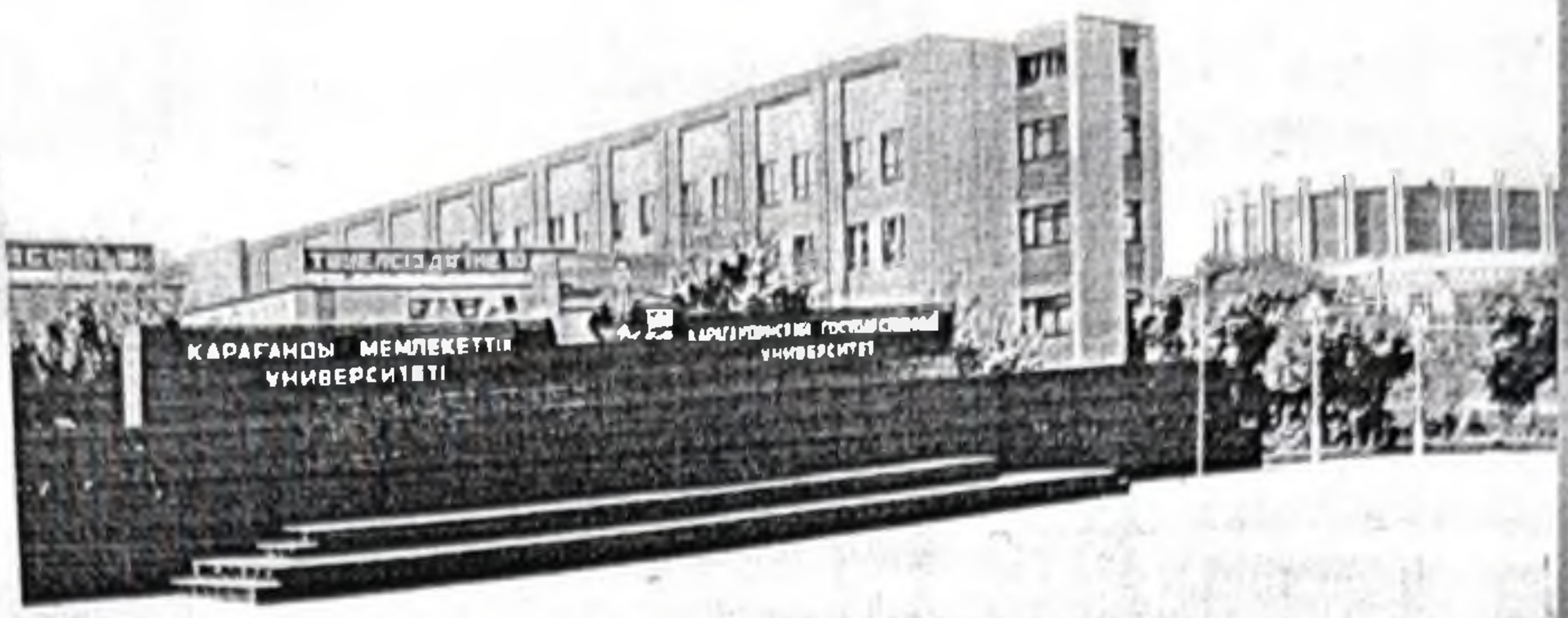
Схема регуляризации квазисингулярного интегрального уравнения показана в работе [4]. В настоящей заметке регуляризация квазисингулярного интегрального уравнения остается открытым.

Вопросы разрешимости краевой задачи со смещением для уравнения Карлемана-Векуа с сингулярной точкой были изучены в работе [5], а также в статье [6] вычислен индекс

и установлен нетеровость сингулярного интегрального уравнения, связанное со спектральными вопросами оператора Коши-Римана с нелокальными краевыми условиями.

Вывод. Задача на собственные значение дифференциального оператора Коши-Римана со смещением во внутрь области, т.е. с краевыми условиями типа Бицадзе-Самарского, редуцирована к квазисингулярному интегральному уравнению с непрерывным ядром.

1. Отелбаев М., Шыныбеков А.Н. О корректных задачах типа Бицадзе-Самарского //ДАН СССР.–1982.–Т.265, №4.–С.815-819.
2. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения.–М., 1968.–511 с.
3. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ.–М., 1976.–Ч.1.–320 с.
4. Михлин С.Г. Сингулярные интегральные уравнения //Успехи математических наук.–1948.–Вып. 3(25).–С.30-111.
5. Касымова Д.Е., Тунгатаров А.Б. Об одной краевой задаче со смещением для уравнения Карлемана-Векуа с сингулярной точкой // Межвузовский сборник научных трудов: Обобщенные аналитические функции и их приложения.–Караганда: КарГУ, 1997.–С.48-53.
6. Иманбаев Н.С. О нетеровости одного сингулярного интегрального уравнения // Известия НАН РК. Серия физико-математическая. 2002. №1 (221).– С. 90-92.



МАТЕМАТИКА сериясы
№ 4(72)/2013
Серия МАТЕМАТИКА

ҚАРАҒАНДЫ УНИВЕРСИТЕТІНІҢ ХАБАРШЫСЫ

ВЕСТНИК КАРАГАНДИНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

ISSN 0142-0843

References

- Ben Yaacov, Bruno Poizat. *The Journal of Symbolic Logic 72*. — 2007. — P. 1141–1162.
- Ben-Yaacov. *Journal of Mathematical Logic 3*. — 2003. — No. 1. — P. 85–118.
- Bruno Poizat. *Annals of Pure and Applied Logic 161*. — 2010. — P. 812–816.
- Bruno Poizat. *The Journal of Symbolic Logic 71*. — 2006. — P. 969–976.

Б.Пуаза

Позитивті логиканың негіздері

Мақаланың басты мақсаты — позитивті логиканың негізгі ұғымдарын беру. Бұл жұмыстың мазмұны академик Е.А.Бөкетов атындағы Қарағанды мемлекеттік университетінде 2013 жылдың сәуір–мамыр айларында мен оқыған дәріс курсының квинтэссенциясы болып табылады.

Б.Пуаза

Основы позитивной логики

Основная цель статьи — дать основные понятия позитивной логики. Содержание данной работы есть квинтэссенция курса лекций, прочитанных мною в Карагандинском государственном университете имени академика Е.А.Букетова в апреле–мае 2013 года.

4

517.927.5

N.S.Imanbayev

Kh.A.Yasavi International Kazakh-Turkish University, Turkestan (E-mail: imanbaevnur@mail.ru)

On the stability and instability of the basis properties of root functions of the Schrödinger equation with nonlocal perturbations of boundary condition

In paper Samarsky-Ionkin spectral problem for the Schrodinger equation with an integral perturbation in the boundary conditions is considered. It is assumed that the unperturbed problem has a system of eigenfunctions forming Riesz basis in $L_2(0,1)$. It is shown that the basis property of the systems of root functions of a problem can be varied under any arbitrarily small variation of the kernel of the integral perturbation.

Key words: a singularly perturbed problem, integral-differential equation, regularization of the problem, iterative task, the asymptotic convergence.

We consider the operator L_1, defined by the differential expression

$$L_1 u = -u'' + q(x)u = \lambda u, x \in (0,1), q(x) \in C^1[0,1] \tag{1}$$

and regular but not strongly regular boundary conditions [1] with an integral perturbation

$$U_1(u) \equiv a_{11}u'(0) + a_{12}u'(1) + a_{13}u(0) + a_{14}u(1) = 0;$$

$$U_2(u) \equiv a_{23}u(0) + a_{24}u(1) = \int_0^1 \overline{P(x)}u(x)dx, P(x) \in L_2(0,1). \tag{2}$$

Here $U_j(u)$ are the independent linear forms with complex constant coefficients satisfying the conditions of unboosted regularity

$$|a_{11}| + |a_{12}| \neq 0, a_{11}a_{24} + a_{12}a_{23} = \pm[a_{11}a_{23} + a_{12}a_{24}] \neq 0.$$

In the paper [2] it is proved that the system of eigenfunctions and associated functions (E@AF) of (1), (2) forms Riesz basis with parentheses for any integral perturbation of boundary conditions, and with strong regularity of the boundary conditions E@AF form a Riesz basis. In the particular case of the integral perturbation of periodic boundary conditions for the operator of multiple differentiation instability of basis property E@AF were investigated in paper [3].

We note that in [4] the stability issues of the basis properties of the periodic problem for the loaded equation with the load of form $p(x)v(0)$ were studied.

There is the following theorem

Theorem 1. Let the unperturbed operator L_0 (when $p(x)=0$) has eigenvalues λ_k^0 and E@AF forming Riesz basis in $L_2(0,1)$. Then the characteristic determinant of the operator L_1 with perturbed regular boundary conditions (2) is represented as

$$\Delta_1(\lambda)=\Delta_0(\lambda)\left(1-\sum_{k=1}^{\infty}\overline{a_{k0}}\left[\frac{V_3(v_{k0})}{\lambda-\lambda_k^0}-\frac{\sqrt{\lambda_k^0}\,\overline{V_3(v_{k1})}}{(\lambda-\lambda_k^0)^2}\right]-\sum_{k=1}^{\infty}\overline{a_{k1}}\frac{V_3(v_{k1}^0)}{\lambda-\lambda_k^0}\right), \tag{3}$$

where $\Delta_0(\lambda)$ is the characteristic determinant of the operator L_0: $V_3(v)$ are homogeneous linear forms that occur in the construction of the boundary conditions of the adjoint unperturbed problem L_0^*: $\{v_{k1}^0, v_{k0}^0\}$ are E@AF of the adjoint unperturbed problem: a_{k1}, a_{k0} are Fourier coefficients of the bi-orthogonal decomposition of the function $\overline{p(x)}$ under this system

$$\overline{p(x)}=\sum_{k=1}^{\infty}[\overline{a_{k1}}v_{k1}^0+\overline{a_{k0}}v_{k0}^0]. \tag{4}$$

By virtue of the obtained representation of the characteristic determinant of (1), (2) we will obtain the asymptotic behavior of the eigenvalues, and we can draw conclusions about the stability or instability of the basis property of the system E@AF for different cases of the unfortified regularity of the boundary conditions.

Let us assume, as an example it is the perturbed Samarsky–Ionkin problem for operator of multiple differentiation, that is, when $q(x)\equiv 0$,

$$u'(0)=u'(1),\ u(0)=\int_0^1\overline{p(x)}u(x)dx; \tag{2a}$$

$$u'(0)=u'(1)+\int_0^1\overline{p(x)}u(x)dx,\ u(0)=0, \tag{2b}$$

when $p(x)\in L_2(0,1)$.

One of the features of these problems is the fact that adjoint problem to (1)–(2a) and (1)–(2b) are spectral problem for the loaded differential equations

$$l^*(v)=-v''(x)+p(x)v'(0)=\bar{\lambda}v(x),\ V_1(v)\equiv v'(1)=0,\ V_2(v)\equiv v(0)-v(1)=0; \tag{2a*}$$

$$l^*(v)=-v''(x)+p(x)v(0)=\bar{\lambda}v(x),\ V_1(v)\equiv v'(1)=0,\ V_2(v)\equiv v(0)-v(1)=0. \tag{2b*}$$

The characteristic determinant of the problem (1)–(2a) is

$$\Delta_1(\lambda)=\Delta_0(\lambda)\cdot\left[1+4\sqrt{2}\pi\sum_{k=1}^{\infty}\overline{a_{k0}}\cdot\frac{k}{\lambda-(2k\pi)^2}\right], \tag{3a}$$

the characteristic determinant of the problem (1)–(2b) is

$$\Delta_1(\lambda)=\Delta_0(\lambda)\cdot\left[1-4\sqrt{2}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left(\pi\overline{a_{k0}}\frac{k}{[\lambda-(2k\pi)^2]^2}+\overline{a_{k1}}\cdot\frac{k}{\lambda-(2k\pi)^2}\right)\right], \tag{3b}$$

when

$$\Delta_0(\lambda)=1-\cos\sqrt{\lambda},$$

$$\overline{p(x)}=\sum_{k=1}^{\infty}\overline{a_{k0}}\cdot 2\sqrt{2}\cdot(1-x)\cdot\sin 2k\pi x+\sum_{k=1}^{\infty}\overline{a_{k1}}\cdot 4\sqrt{2}\cos 2k\pi x. \tag{4a}$$

The function $\Delta_1(\lambda)$ represented by the formula (3a) and (3b) is an entire function the variable λ

From formula (3a) we have two series of eigenvalues of the perturbed problem (1)-(2a)

$$\lambda_1^{(1)} = \lambda_k^0 = (2k\pi)^2 ; \lambda_k^{(2)} = \left[2k\pi + \overline{a_{k0}} \left(\sqrt{2} + \underline{0}\left(\frac{1}{\sqrt{k}} \right) \right) \right]^2$$

We note that systems E@AF of the perturbed problems (1)-(2a), (1)-(2b), and the system E@AF of the unperturbed Samarsky-Ionkin problem (forming Riesz basis) differ from each other only by a finite number of the first members. Consequently, the systems E@AF of the perturbed problems (1)-(2a), (1)-(2c) also form Riesz basis in $L_2(0,1)$.

The set of functions $p(x)$ that can be represented as a series (4ab) is dense one in $L_2(0,1)$.

Theorem 2. The set of functions $p(x) \in L_2(0,1)$, such as systems E@AF of the perturbed problems (1)-(2a) and (1)-(2b) form Riesz basis in $L_2(0,1)$ is dense one in $L_2(0,1)$.

Obviously, the set of functions $p(x) \in L_2(0,1)$ that can be represented as a series (4aв), whose coefficients are asymptotically (that is, starting from some number) have the property $a_{k0} = 0, a_{k1} \neq 0$ will be dense one in $L_2(0,1)$. Hence to prove the theorem it is sufficient to show that for such functions $p(x)$ the system E@AF of the problem does not form the usual basis.

Let j is the large enough number, so that $a_{j0} = 0, a_{j1} \neq 0$. Then from (3a) it is not difficult to see that $\lambda_j^0 = (2j\pi)^2$ is the single eigenvalue of the problem (1)-(2a). By direct computation it is easy to obtain that $u_{j0}(x) = \sqrt{2}\sin 2j\pi x$ is the eigenfunction of the spectral problem (1)-(2a) corresponding to this eigenvalue and $\|u_{j0}(x)\|^2 = 1$.

Let us find eigenfunction of the adjoint problem (2a*) corresponding to eigenvalue $\lambda_j^0 = (2j\pi)^2$. Preserving the general solution of the loaded differential equation from (2a*) when $\bar{\lambda} \neq 0$ by the formula

$$v(x) = C_1 \cos\sqrt{\bar{\lambda}}x + C_2 \sin\sqrt{\bar{\lambda}}x + v(0)\int_0^x p(\xi)\frac{\sin\left(\sqrt{\bar{\lambda}}(x-\xi)\right)d\xi}{\sqrt{\bar{\lambda}}}$$

and satisfying its boundary conditions (4), we obtain a linear system for the coefficients C_i

$$\begin{cases} \left[-\sqrt{\bar{\lambda}}\sin\sqrt{\bar{\lambda}} + \sqrt{\bar{\lambda}}\int_0^1 p(\xi)\cos\sqrt{\bar{\lambda}}(1-\xi)d\xi \right] C_1 + \sqrt{\bar{\lambda}}\cos\sqrt{\bar{\lambda}}C_2 = 0, \\ \left[1 - \cos\sqrt{\bar{\lambda}} - \int_0^1 p(\xi)\sin\sqrt{\bar{\lambda}}(1-\xi)d\xi \right] C_1 - \sin\sqrt{\bar{\lambda}}C_2 = 0. \end{cases}$$

When $\bar{\lambda} = \lambda_j^0 = (2j\pi)^2$ we have

$$\begin{cases} C_1 \int_0^1 p(\xi)\cos 2j\pi\xi d\xi + C_2 = 0, \\ C_1 \int_0^1 p(\xi)\sin 2j\pi\xi d\xi = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Computation the integrals appearing in (5) gives

$$\int_0^1 p(\xi)\cos 2j\pi\xi d\xi = 2\sqrt{2}\overline{a_{j1}} + \sum_{k=1, k\neq j}^{N} \frac{\sqrt{2}}{\pi} a_{k1} \frac{k}{k^2 - j^2}, \text{ when } j > N;$$

$$\int_0^1 p(\xi)\sin 2j\pi\xi d\xi = \frac{\sqrt{2}}{2}\overline{a_{j0}} = 0, \text{ when } j > N.$$

From Young's theorem 5: [theorem 276] it follows that $\lim\limits_{j\to+\infty}\sum\limits_{k=1,k\neq j}^{\infty}\overline{a_{k1}}\dfrac{k}{j^2-k^2}=\underline{\underline{O}}\left(\dfrac{1}{j^2}\right)$. From system (5) expressing C_2 through C_1 we get $C_2=-C_1\left[2\sqrt{2}\overline{a_{j1}}+\underline{\underline{O}}\left(\dfrac{1}{j^2}\right)\right]$ when $j>N$.

Therefore, for all $j>N$ with $a_{j0}=0$, $a_{j1}\neq 0$, eigenfunction of the adjoint problem (2a*) has the form

$$v_{j0}(x)=C_1\left(\cos 2j\pi x-\left[2\sqrt{2}\overline{a_{j1}}+\underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{j^2}\right)\right]\sin 2j\pi x+\int_0^x p(\xi)\frac{\sin\left(2j\pi(x-\xi)\right)d\xi}{2j\pi}\right). \qquad (5_{\text{B}}^*)$$

In order to show that the basis property of the system E@AF of the perturbed problems (1)-(2a), (1)-(2b) are unstable for an arbitrarily small integral perturbation of the boundary condition (2a), we will find the eigenfunctions of the problem (1)-(2a), and for the boundary condition (2b), we will find eigenfunction of the adjoint problem (2b*) corresponding to the eigenvalue $\lambda_j^0=(2j\pi)^2$, that is

$$u_j^1(x)=C_1\left\{\cos(2j\pi x)+\frac{\sqrt{2}}{a_{j0}}\left[1-\frac{\sqrt{2}}{4\pi}\cdot\frac{\overline{a_{j0}}}{j}+\frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{\infty}\overline{a_{k0}}\frac{k}{j^2-k^2}\right]\sin(2j\pi x)\right\}, \qquad (5\text{ a})$$

$$v_{j0}(x)=C_1\left\{\cos(2j\pi x)-\left[2\sqrt{2}\cdot\overline{a_{j1}}+\underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{j^2}\right)\right]\sin(2j\pi x)+\int_0^x p(\xi)\frac{\sin(2j\pi(x-\xi))d\xi}{2j\pi}\right\} \qquad (5_{\text{B}}^*)$$

We choose constant C_1 from the condition of biorthogonality $\left(u_{j0}(x),v_{j0}(x)\right)=1$. Then we have

$$C_{1j}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left[2\sqrt{2}a_{j1}+\underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{j^2}\right)+\int_0^1\sqrt{2}\sin 2j\pi x dx\int_0^x p(\xi)\frac{\sin\left(2j\pi(x-\xi)\right)d\xi}{2j\pi}\right]\right)=1.$$

Using Holder's inequality to the integral summand, when $j\to\infty$ we obtain estimate

$$\left|\int_0^1\sqrt{2}\sin 2j\pi x dx\int_0^x p(\xi)\frac{\sin\left(2j\pi(x-\xi)\right)d\xi}{2j\pi}\right|\le\frac{1}{\sqrt{2}\pi j}\sqrt{\int_0^1|p(\xi)|^2d\xi}=\underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{j}\right).$$

Then $C_{1j}\left[\sqrt{2}a_{j1}+\underline{\underline{O}}\left(\dfrac{1}{j}\right)\right]=1$. Therefore $C_{1j}=\dfrac{1}{\sqrt{2}a_{j1}+\underline{\underline{O}}\left(\dfrac{1}{j}\right)}\to\infty$, when $j\to\infty$ because the Fourier coefficients belong class $a_{j1}\in l_2$. Estimating $v_{j0}(x)$ in the norm $L_2(0,1)$ we get

$$\|v_{j0}\|\ge C_{1j}\|\cos 2j\pi x\|-C_{1j}\left\|\left[2\sqrt{2}a_{j1}+\underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{j^2}\right)\right]\sin 2j\pi x+\int_0^x P(\xi)\frac{\sin\left(2j\pi(x-\xi)\right)d\xi}{2j\pi}\right\|\ge$$

$$\ge\frac{C_{1j}}{\sqrt{2}}\left[1-\left(2a_{j1}+\underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{j^2}\right)\right)+\underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{j}\right)\right].$$

Consequently $\lim_{j\to\infty}\|u_{j0}\|\cdot\|\vartheta_{j0}\|=\infty$. Namely the condition of the uniform minimality [6] of the E@AF system is not performed and, therefore, the system does not form a regular basis in $L_2(0,1)$. We formulate this fact as

Theorem 3. The set of functions $p(x)\in L_2(0,1)$, such that systems E@AF of the perturbed problems (1)-(2a) and (1)-(2b) do not form a regular basis in $L_2(0,1)$ is dense one in $L_2(0,1)$.

Remark. Adjoint operators simultaneously have Riesz basis property of root functions. Hence we obtain

Corollary 1. The set P of functions $p(x) \in L_2(0,1)$ for which the system $\{\alpha_k\}$ AF of problems (2a*) and (3) for loaded differential equation forms a Riesz basis in $L_2(0,1)$ is dense set in $L_2(0,1)$. The set $L_2(0,1) \setminus P$ is also dense $L_2(0,1)$.

The results of the present work, in contrast to [2] demonstrate the instability and stability of the basis properties of root functions of the problem with an integral perturbation of the boundary conditions, which are regular, but not strongly regular ones.

In conclusion, the author expresses his gratitude to the corresponding member of National Academy of Sciences of Kazakhstan, doctor of physical and mathematical sciences, professor M.A. Sadybekov for fruitful discussions of results.

References

1 Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969. — 552 с.

2 Шкаликов А.А. О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными условиями // Вестн. МГУ. Сер. Матем. и механ. — 1982. — № 6. — С. 12–21.

3 Мокин А.С. О нелокальном возмущении периодической задачи на собственные значения // Дифференциальные уравнения. — 2006. — Т. 42, № 4. — С. 560–562.

4 *Sadybekov M.A., Imanbayev N.S.* On the Basis Property of Root Functions of a Periodic Problem with an Integral Perturbation of the Boundary Condition // Differential equations. — 2012. — Vol. 48, № 6. — P. 896–900.

5 *Харди Г.Г., Литтлвуд Дж.Е., Полиа Г.* Неравенства. — М.: ВК, 1948. — С. 240.

6 Функциональный анализ / Под ред. С.Г. Крейна. — М.: Мир, 1972. — С. 66.

Н.С.Иманбаев

Бейлокалды толқытылған шеттік шарттармен берілген Шредингер операторының түбірлік функцияларының базистік қасиеттерінің орнықтылық және орнықсыздық мәселесі

Мақалада Шредингер операторы үшін қойылған Самарский-Ионкин спектралды есебінің шеттік шарттарының біреуін интеграл арқылы толқыту барысында оның меншікті және тіркелген функцияларының жүйесінің базистік қасиеттерінің өзгеру сипаты зерттелген. Шредингер операторы үшін қойылған Самарский-Ионкин спектралды есебінің меншікті және тіркелген функцияларының $L_2(0,1)$ кеңістігінде Рисс базисін құратындығы дәлелденген. Регулярлы, бірақ күшейтілген регулярлы емес болатын шеттік шарттардағы интегралдық толқытуға байланысты, түбірлік функциялардың базистік қасиеттерінің орнықтылығы мен орнықсыздығын осы жұмыстың нәтижелері дәлелдейді.

Н.С.Иманбаев

К вопросу устойчивости и неустойчивости свойств базисности корневых функций оператора Шредингера с нелокальным возмущением краевого условия

В статье исследовано изменение базисных свойств систем собственных и присоединенных функций (СиПФ) при интегральном возмущении одного из краевых условий спектральной задачи Самарского-Ионкина для оператора Шредингера. Доказано, что система СиПФ спектральной задачи Самарского-Ионкина для оператора Шредингера образует базис Рисса в пространстве $L_2(0,1)$. Результаты настоящей работы демонстрируют неустойчивость и устойчивость свойств базисности корневых функций задачи при интегральном возмущении краевых условий, являющихся регулярными, но не усиленно регулярными.

References

1. Chaimark M.A. *Linear differential operators*. Moscow: Nauka, 1969, p. 352.
2. Shkalikov A.A. *On the basis of eigenfunctions of ordinary differential operators with integral boundary conditions*. Moscow. State University Bull. Mat. and Mech., 1982, 6, p. 12-21.
3. Makin A.S. *Differential Equations*, 2006, 42, 4, p. 560–562.
4. Sadybekov M.A., Imanbayev N.S. *Differential equations*, 2012, 48, 6, p. 896–900.
5. Khardi G.G., Lyttlvud D.E., Polia G. *Inequalities*. Moscow: VK, 1948, p. 240.
6. *Function analysis* / Ed. S.G Crane. Moscow: Mir, 1972, p. 66.

УДК 510.67

Н. С. Иманбаев, Задача о собственных значениях дифференциального оператора Коши–Римана с нелокальными краевыми условиями, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014, выпуск 1(34), 25–36

DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu1264

УДК 517.984.5

ЗАДАЧА О СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА КОШИ–РИМАНА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Н. С. Иманбаев

Международный казахско-турецкий университет им. Х. А. Ясави,
Казахстан, 487010, Туркестан, пл. Есим-Хана, 2.

Рассматривается редуцированная спектральная задача для оператора Коши–Римана с нелокальными краевыми условиями к линейному интегральному уравнению Фредгольма второго рода с непрерывным ядром. Соответствующий детерминант Фредгольма определён при всех спектральных параметрах λ, кроме $\lambda \neq 2$, $\operatorname{Re}\lambda \neq 1$. Нахождение нулей определителя Фредгольма, записанного в такой форме, неэффективно, поскольку он не является целой функцией от спектрального параметра, а его главная часть не выделена. Исследована структура ядра оператора. Для приближённого решения интегрального уравнения приведены результаты работ И. Акбергенова, где даны оценки абсолютной величины разности между точным и приближенным решениями интегрального уравнения. Охарактеризованы спектральные параметры, при которых неоднородная краевая задача со смещением для уравнений Коши–Римана всюду разрешима в классе непрерывных функций на единичном круге. Показана явная конструкция, аппроксимирующая решение неоднородной краевой задачи.

Ключевые слова: *оператор Коши–Римана, пространство непрерывных функций, фредгольмовость, резольвентное множество, задача со смещением, ядро, детерминант Фредгольма.*

В спектральной теории дифференциальных операторов в последние годы все большее внимание уделяется задачам для уравнений с частными производными, в которых краевые условия представляют собой соотношения между значениями искомых функций, вычисленными в различных точках, лежащих на границе или внутри рассматриваемой области.

Этот интерес объясняется как теоретической значимостью получаемых результатов, так и возможностями важных приложений. Подобные граничные условия возникают при математическом моделировании задач газовой динамики, теории плазмы, теплопроводности, излучения лазера, прогнозирования почвенной влаги, при изучении процессов размножения клеток, бактерий и т.п. В некоторых случаях (физика сверхпроводников, радиационный перенос, процессы распространения загрязнения в воде биосферы, демография, популяционная генетика и другие биологические проблемы) граничные условия имеют интегральную форму.

Примеры указанных краевых условий, возникающих в теплопроводности,

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print); doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1264

Образец цитирования: Н. С. Иманбаев, “Задача о собственных значениях дифференциального оператора Коши–Римана с нелокальными краевыми условиями” // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2014. № 1 (34). С. 25–36. doi: 10.14498/vsgtu1264.

Сведения об авторе: *Нурлан Сайрамович Иманбаев* (к.ф.-м.н., доц.), профессор, каф. математики.

E-mail address: imanbaevnur@mail.ru

были сформулированы ещё В. А. Стекловым [1], а в газовой динамике — Ф. И. Франклем [2]. А. М. Нахушевым [3, 5] были поставлены и изучены сразу несколько задач данного типа, а для их названия предложен термин «задачи со смещением». В статье А. В. Бицадзе и А. А. Самарского [4] впервые была исследована задача «со смещением внутрь области». Содержание последних публикаций привело к осознанию качественной новизны краевых задач со смещениями для теории дифференциальных уравнений в частных производных. В последних публикациях [6] для уравнений Бицадзе—Лыкова поставлена задача со смещением с операторами Кобера—Эрдейи и М. Сайго в краевом условии, а также исследованы вопросы единственности и неединственности решения задачи при различных функциях и значениях констант, входящих в краевые условия. В работах [5, 7] исследовано состояние краевых задач со смещением для основных типов уравнений в частных производных. Краевая задача со смещением для уравнения Карлемана—Векуа с сингулярной точкой изучалась в работе [8]. Обилие публикаций, где изучаются всё более общие ситуации, производит иногда впечатление, что теория краевых задач «со смещением» уже завершена. Однако здесь имеется ряд менее изученных, но важных вопросов, в частности, задача о собственных значениях или об их аналитическом описании с помощью, например, асимптотических разложений. Применяемые в настоящее время методы функционального анализа и метод сведения к модельным уравнениям путём интегральных преобразований, с одной стороны, недостаточны для того, чтобы получить такую детальную информацию. С другой стороны, вряд ли можно надеяться получить, например, решение задачи на собственные значения для дифференциальных уравнений с частными производными в столь же явном виде, как это было сделано в аналогичной ситуации для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Общность перечисленных выше вопросов для уравнений с частными производными вынуждает в дальнейшем наложить на изучаемые операторы ряд весьма жёстких ограничений. Выяснение правильных постановок задач и исследование специфических свойств решений для «неклассических» уравнений удобно начинать с рассмотрения идеализированных моделей, например, уравнений с постоянными коэффициентами.

В связи с вышеизложенным целями настоящей работы являются:

1) исследование спектральной задачи для оператора Коши—Римана с нелокальными краевыми условиями

$$\frac{\partial\omega}{\partial\bar z} = \lambda\omega + f(z), \quad |z| < 1, \tag{1}$$

$$\operatorname{Re}\omega(z) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{|t|=1}\frac{\lambda\omega(t)+f(t)}{t-z}dt\right), \quad |z| = 1, \tag{2}$$

$$\operatorname{Im}\omega(0) = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\frac{\lambda\omega(t)+f(t)}{t}dt\right), \tag{3}$$

где λ — комплексное число (спектральный параметр);

2) приближенное решение краевой задачи (1)–(3).

Описание общих регулярных краевых задач для дифференциального выражения Коши—Римана разработано Дж. Ф. Нейманом, М. И. Вишиком,

А. А. Дезиным, М. Отелбаевым. Приведённая задача носит нелокальный характер, и подобные задачи для операции Коши—Римана описаны М. Отелбаевым, А. Н. Шыныбековым [9].

С другой точки зрения вопросы разрешимости и поведения решения краевой задачи для обобщенного уравнения Коши—Римана глубоко изучались в работах [10–12]. Краевые задачи для обобщенной системы Коши—Римана с негладкими коэффициентами исследовались в работах [13, 14].

В функциональном пространстве $C(|z| \leqslant 1)$ рассмотрим оператор K, порождаемый дифференциальной операцией Коши—Римана

$$K\omega(z) = \frac{\partial\omega(z)}{\partial\bar{z}},$$

где

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy, \quad \frac{\partial}{\partial\bar{z}} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}$$

на множестве

$$D(K) \subset \left\{\omega(z) \in C(|z| \leqslant 1), \frac{\partial\omega}{\partial\bar{z}} \in C(|z| < 1)\right\}.$$

Считаем, что оператор K имеет непустое резольвентное множество $\rho(K)$. Не умаляя общности, предполагаем

$$0 \in \rho(K), \tag{4}$$

т. е. существует ограниченный оператор K^{-1}. В работе [9] описано множество операторов $\{K\}$ со свойством (4).

Наиболее глубокие результаты при исследовании спектра эллиптических операторов приведены в работе [15]. В общем случае спектр эллиптического оператора существенно определяется спектральными свойствами граничного оператора. Однако выяснение зависимости спектра оператора Коши—Римана в исходных терминах граничных условий представляет актуальную (и нерешённую) проблему. В статье [16] в ограниченной области с достаточно гладкой границей рассматриваются основные краевые задачи для полулинейных уравнений эллиптического типа со спектральным параметром и разрывной нелинейностью. В работе [17] задача (1)–(3) на собственные значения для оператора Коши—Римана с нелокальными краевыми условиями при $\lambda \neq 2$, $\operatorname{Re}\lambda \neq 1$ для вещественной функции $u(z) = \operatorname{Re}\omega(z)$ на окружности $|z| = 1$ редуцирована сначала к сингулярному интегральному уравнению, затем к линейному интегральному уравнению Фредгольма второго рода с непрерывным ядром

$$\left(a^2(z) - b^2(z)\right)u(z) + \oint_{|t|=1} K(z,t)u(t)dt = 0, \tag{5}$$

где

$$a(z) = \frac{(\lambda-2)e^{\lambda\bar{z}} + (\bar{\lambda}-2)e^{\bar{\lambda}z}}{2}; \quad b(z) = \frac{(2-\lambda)e^{\lambda\bar{z}} - (2-\bar{\lambda})e^{\bar{\lambda}z}}{2};$$

$$K(z,t) = \frac{e^{\lambda\bar t} - e^{\lambda\bar z}}{t-z}\left\{\frac{\lambda a(z)}{\pi i} - \frac{\lambda b(z)}{\pi i}\right\} + \frac{e^{\bar\lambda t} - e^{\bar\lambda z}}{t-z}\left\{\frac{a(z)}{\pi i}\bar\lambda - \frac{2b(z)}{\pi i}\right\} +$$
$$+ \frac{1}{t}\left\{\frac{(2+\lambda)b(z)(1-e^{\lambda\bar z})}{2\pi i} + \frac{a(z)+b(z)}{2\pi i}\times\right.$$
$$\times\left(e^{\lambda\bar z} - e^{\bar\lambda z} - \lambda - \bar\lambda e^{\bar\lambda z} + \frac{1}{2}\lambda e^{\lambda\bar z} + \frac{1}{2}\bar\lambda e^{\bar\lambda z}\right) +$$
$$+ \frac{i(a(z)+b(z))}{4\pi(1-\mathrm{Re}\lambda)}(3\lambda+3\bar\lambda)\left(e^{\bar\lambda z} - e^{\lambda\bar z} + \frac{1}{2}\bar\lambda e^{\bar\lambda z} - \frac{1}{2}\lambda e^{\lambda\bar z} + \lambda - \bar\lambda\right) -$$
$$\left. - \frac{(2+\lambda)(3\lambda+3\bar\lambda)}{8\pi(1-\mathrm{Re}\,\lambda)}(1-e^{\lambda\bar z})\right\} + \frac{\bar\lambda e^{\bar\lambda t}}{t}\left\{\frac{(2+\lambda)b(z)}{4\pi(1-\mathrm{Re}\,\lambda)}(1-e^{\lambda\bar z}) +\right.$$
$$\left. + \frac{a(z)+b(z)}{2\pi(1-\mathrm{Re}\,\lambda)}\left(e^{\bar\lambda z} - e^{\lambda\bar z} + \frac{\bar\lambda e^{\bar\lambda z}}{2} - \frac{\lambda e^{\lambda\bar z}}{2} + \lambda - \bar\lambda\right)\right\} +$$
$$+ \frac{\lambda e^{\lambda\bar t}}{t}\frac{a(z)+b(z)}{2\pi(1-\mathrm{Re}\,\lambda)} i\left(e^{\bar\lambda z} - e^{\lambda\bar z} + \frac{1}{2}\bar\lambda e^{\bar\lambda z} - \frac{1}{2}\lambda e^{\lambda\bar z} + \lambda - \bar\lambda\right).$$

Несколько замечаний о структуре ядра $K(z,t)$. Отметим, что

$$a^2(z) - b^2(z) \neq 0 \quad \text{при } |z| = 1 \text{ и } \lambda \neq 2.$$

Итак, ядро $K(z,t)$ имеет представление

$$K(z,t) = \frac{e^{\lambda\bar t} - e^{\lambda\bar z}}{t-z}A(z,\lambda) + \frac{e^{\bar\lambda t} - e^{\bar\lambda z}}{t-z}B(z,\bar\lambda) + \frac{C(z,\lambda)}{t} +$$
$$+ E(z,\lambda)D(t,\lambda) + F(z,\lambda)Q(t,\lambda), \quad (6)$$

где E, A, B, C, D, F, Q зависят от t и z. Конкретный вид E, A, B, C, D, F, Q можно восстановить из предыдущей формулы для $K(z,t)$. Заметим, что дробь $(e^{\bar\lambda t} - e^{\bar\lambda z})/(t-z)$ с точностью до множителя $\exp(\bar\lambda z)$ зависит (в виде степенного ряда) от разности $(t-z)$. Аналогичное рассуждение верно и для $(e^{\lambda\bar t} - e^{\lambda\bar z})/(t-z)$ при $|t| = |z| = 1$, так как справедливо разложение

$$\frac{e^{\lambda\bar t} - e^{\lambda\bar z}}{t-z}\frac{1}{tz} = -\frac{\exp(\lambda\bar z)}{tz}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\bar t - \bar z)^{k-1}}{k!}\lambda^k.$$

Последние три слагаемых в правой части (6) представляют сумму, соответствующую вырожденному ядру. Таким образом, ядро (6) состоит из вырожденной части, а другая часть содержит слагаемые, зависящие от разности. Вырожденные ядра изучались в монографии [18]. Интегральные операторы, зависящие от разности $(t-z)$, рассматривались в работах [19, 20]. Однако прямое применение результатов этих работ не даст эффекта. Согласно результатам главы IV монографии [18] необходимым и достаточным условием существования ненулевого решения интегрального уравнения является обращение в нуль так называемого определителя Фредгольма. Определитель Фредгольма строится по формуле

$$\Delta(\lambda) = 1 + \frac{1}{1!}\oint_{|z|=1} \hat{K}(z,z)dz + \frac{1}{2!}\oint_{|z|=1} dz \oint_{|t|=1} dt \begin{vmatrix} \hat{K}(z,z) & \hat{K}(z,t) \\ \hat{K}(t,z) & \hat{K}(t,t) \end{vmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{3!}\oint_{|z|=1} dz \oint_{|t|=1} dt \oint_{|\tau|=1} d\tau \begin{vmatrix} \hat{K}(z,z) & \hat{K}(z,t) & \hat{K}(z,\tau) \\ \hat{K}(t,z) & \hat{K}(t,t) & \hat{K}(t,\tau) \\ \hat{K}(\tau,z) & \hat{K}(\tau,t) & \hat{K}(\tau,\tau) \end{vmatrix} + \ldots +,$$

где $\hat{K}(z,t) = K(z,t)/(a^2(z) - b^2(z))$.

Сходимость приведённого ряда следует из следующего неравенства Адамара. Если D — определитель с комплексными элементами

$$c_{hk} = p_{hk} + is_{hk} \quad (h,k = 1,2,\ldots,n),$$

то верно неравенство

$$D \leqslant P_1 P_2 \cdots P_n, \quad \text{где} \quad P_h = \Big(\sum_{k=1}^{n} |c_{hk}|^2\Big)^{1/2}.$$

Действительно, при фиксированном λ, удовлетворяющем условиям $\lambda \neq 2$, $\operatorname{Re}\lambda \neq 1$, модуль ядра $|\hat{K}(z,t)|$ ограничен при $|t| = |z| = 1$ некоторым числом M. Тогда из вышеуказанного неравенства Адамара следует, что определитель порядка n с элементами, не превосходящими по модулю числа M, сам по модулю не больше $M^n n^{n/2}$. Тогда $|\Delta(\lambda)|$ мажорируется следующим сходящимся рядом:

$$1 + 2\pi M + \frac{1}{2!}(2\pi)^2 M^2 2 + \frac{1}{3!}(2\pi)^3 M^3 3^{3/2} + \ldots.$$

Таким образом, детерминант Фредгольма $\Delta(\lambda)$ определен при всех λ, удовлетворяющих условиям $\lambda \neq 2$, $\operatorname{Re}\lambda \neq 1$. Однако нахождение нулей определителя $\Delta(\lambda)$, записанного в вышеприведенной форме, неэффективно, поскольку $\Delta(\lambda)$ не является целой функцией от λ и не выделена его главная часть.

В работе [17] вышеуказанным образом исследовалась структура ядра $K(z,t)$, при этом линейное интегральное уравнение Фредгольма (5) решить точно не удалось. Поэтому в настоящей работе для приближённого решения уравнения применим результаты работы [21], где дана оценка абсолютной величины разности между точным и приближенным решениями интегрального уравнения с выделением из данного ядра его главной части.

Введём функцию

$$R(x,y) = K(x,y) - \tilde{K}(x,y).$$

В нашем случае

$$R(z,t) = \frac{e^{\lambda\bar{t}} - e^{\lambda\bar{z}}}{t-z}\hat{A}(z,\lambda) + \frac{e^{\bar{\lambda}t} - e^{\bar{\lambda}z}}{t-z}\hat{B}(z,\bar{\lambda}),$$

$$\tilde{K}(z,t) = \frac{\hat{C}(z,\lambda)}{t} + \hat{E}(z,\lambda)D(t,\lambda) + \hat{P}(z,\lambda)Q(t,\lambda),$$

$$A(z) = e^{\lambda\bar{z}}\Big(\frac{\lambda^2 - 2\lambda}{2\pi i} - \frac{2-\lambda}{\pi i}\Big) + e^{\bar{\lambda}z}\Big(\frac{\lambda\bar{\lambda} - 2\lambda}{2\pi i} - \frac{2-\bar{\lambda}}{\pi i}\Big),$$

поэтому для модуля $A(z)$ справедлива оценка

$$|A(z)| < e^{|\lambda|}\left(1+|\lambda|^2\right).$$

Точно так же оценивается функция $B(z)$:

$$|B(z)| \leqslant C\left(|\lambda|^2+1\right)e^{|\lambda|},$$

где C зависит от λ и z,

$$B(z) = \frac{e^{\bar\lambda t}-e^{\bar\lambda z}}{t-z}\left\{\frac{a(z)}{\pi i}\bar\lambda - \frac{2b(z)}{\pi i}\right\},$$

$$a(z) = \frac{(\lambda-2)e^{\lambda\bar z}+(\bar\lambda-2)e^{\bar\lambda z}}{2}, \quad b(z) = \frac{(2-\lambda)e^{\lambda\bar z}-(2-\bar\lambda)e^{\bar\lambda z}}{2}.$$

Таким образом, справедлива оценка для ядра возмущения

$$|R(z,t,\lambda)| \leqslant C_1 e^{4|\lambda|}\frac{|\lambda|^2+|\lambda|+1}{a^2(z_0(\lambda))-b^2(z_0(\lambda))},$$

где C_1 не зависит от λ, z, t, т. е. в качестве малой величины можно взять правую часть последнего неравенства.

Далее оценим сверху резольвенту $|\tilde\Gamma(z,t;\lambda)|$, соответствующую вырожденному ядру $\bar K(z,t)$, оценивая снизу $|a^2(z)-b^2(z)|$. В то же время для величин $|C(z;\lambda)|$, $|E(z;\lambda)|$, $|D(t;\lambda)|$, $|F(z;\lambda)|$, $|Q(t;\lambda)|$ нужны верхние неравенства. Поскольку величина $a^2(z)-b^2(z)$ при $\lambda \neq 2$ строго положительна, при фиксированном λ, для которого $\lambda \neq 2$, существует минимум по z, изменяющийся вдоль единичной окружности $|z|=1$:

$$\min_{|z|=1}\left(a^2(z)-b^2(z)\right) = a^2\left(z_0(\lambda)\right)-b^2\left(z_0(\lambda)\right) > 0,$$

где

$$|z_0(\lambda)| = 1, \quad \tilde\Gamma_1(z,t) = \frac{(-1)}{\Delta_1(\lambda)}|\tilde\Gamma(z,t;\lambda)|,$$

то есть

$$\tilde\Gamma_1(z,t) = \frac{(-1)}{\Delta_1(\lambda)}\Delta,$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} \hat C(z,\lambda) & \hat E(z,\lambda) & \hat F(z,\lambda) & 0 \\ 1+\oint\frac{\hat C(\tau,\lambda)}{\tau}d\tau & 1+\oint\frac{\hat E(z,\lambda)}{\tau}d\tau & 1+\oint\frac{\hat F(z,\lambda)}{\tau}d\tau & \frac{1}{t} \\ \oint\hat C(\tau,\lambda)D(\tau,\lambda)d\tau & \oint\hat E(z,\lambda)D(\tau,\lambda)d\tau & \oint\hat F(z,\lambda)D(\tau,\lambda)d\tau & D(t,\lambda) \\ \oint\hat C(\tau,\lambda)Q(\tau,\lambda)d\tau & \oint\hat E(z,\lambda)Q(\tau,\lambda)d\tau & \oint\hat F(z,\lambda)Q(\tau,\lambda)d\tau & Q(t,\lambda) \end{vmatrix},$$

$\Delta_1(\lambda)$ — соответствующий определитель Фредгольма, а все интегралы в Δ берутся по контуру $|\tau|=1$.

Оценим сверху по отдельности величины, составляющие $R(z,t;\lambda)$. Оценим

$$\frac{e^{\lambda\bar{t}}-e^{\lambda\bar{z}}}{t-z} \quad \text{при } |t|=|z|=1:$$

$$\left|\frac{e^{\lambda(\bar{t}-\bar{z})}-1}{t-z}\right|\cdot|e^{\lambda\bar{z}}| \leqslant e^{|\lambda|}\left\{|\lambda|+\frac{|\lambda|^2 2}{2!}+\frac{|\lambda|^3 2^2}{3!}+s\right\}=e^{|\lambda|}\frac{e^{2|\lambda|}-1}{2}\leqslant\frac{1}{2}e^{3|\lambda|}.$$

Величины

$$\max_{|z|=1}|C(z,\lambda)|\,,\ \max_{|z|=1}|E(z,\lambda)|\,,\ \max_{|t|=1}|D(t,\lambda)|\,,\ \max_{|z|=1}|F(z,\lambda)|\,,\ \max_{|t|=1}|Q(t,\lambda)|$$

легко оцениваются мажорантой

$$\frac{C}{|1-\mathrm{Re}\lambda|}e^{2|\lambda|}\left(|\lambda|^2+|\lambda|+1\right).$$

Пусть при фиксированном λ определитель Фредгольма $\Delta_1(\lambda)\neq 0$. Тогда, следуя [21], имеем верхнюю оценку для резольвенты $\tilde{\Gamma}_1(z,t;\lambda)$:

$$\left|\tilde{\Gamma}_1(z,t;\lambda)\right|\leqslant\frac{C_1\left(|\lambda|^2+|\lambda|+1\right)^3e^{6|\lambda|}}{\left|\Delta_{(\lambda)}\right|\left|a^2\left(z_0(\lambda)\right)-b^2\left(z_0(\lambda)\right)\right|\left|1-\mathrm{Re}\lambda\right|^3},\quad \mathrm{Re}\lambda\neq 1.$$

Учитывая все оценки, получим

$$2\pi C_1e^{4|\lambda|}\left(|\lambda|^2+|\lambda|+1\right)\times$$
$$\times\left(1+2\pi\frac{C_2\left(|\lambda|^2+|\lambda|+1\right)^3e^{6|\lambda|}}{|\Delta_1(\lambda)|\cdot\left|a^2\left(z_0(\lambda)\right)-b^2\left(z_0(\lambda)\right)\right|\cdot|1-\mathrm{Re}\,\lambda|^3}\right)<1. \quad (7)$$

Условие $\mathrm{Re}\,\lambda\neq 1$ может выполняться только если C_1 меньше единицы. В то же время на константу C_1 нельзя накладывать ограничения. Таким образом, из приведённых рассуждений видим, что применение результатов [21] требует малости величины, т. е. константа в нашем случае определяется малостью ядра возмущении $R(z,t)=K(z,t)-\tilde{K}(z,t)$.

Следовательно, при удачной аппроксимации ядра $K(z,t)$ вырожденным ядром $\tilde{K}(z,t)$ приходим к первому результату настоящей работы.

Утверждение. *Если $\lambda\neq 2$ и определитель Фредгольма вырожденного ядра $\tilde{K}(z,t)$ отличен от нуля, то λ не является собственным значением исходной задачи* (1)–(3) *для уравнения Коши–Римана.*

Для приближения ядра $K(z,t)$ вырожденным ядром $\tilde{K}(z,t)$ достаточно аппроксимировать величину $(e^{\bar{\lambda}t}-e^{\bar{\lambda}z})/(t-z)$ вырожденным ядром. Поскольку

$$\frac{e^{\bar{\lambda}t}-e^{\bar{\lambda}z}}{t-z}=e^{\bar{\lambda}z}\frac{e^{\bar{\lambda}(t-z)}-1}{t-z}=e^{\bar{\lambda}z}\left\{\bar{\lambda}+\frac{\bar{\lambda}^2(t-z)}{2!}+\frac{\bar{\lambda}^3(t-z)^2}{3!}+\dots\right\},$$

при $|\lambda| < R_1$ (R_1 — фиксировано) соответствующая аппроксимация выглядит так:

$$e^{\bar\lambda z}U_N(t-z,\bar\lambda) \equiv e^{\bar\lambda z}\Big\{\bar\lambda + \frac{\bar\lambda^2(t-z)}{2!} + \ldots + \frac{\bar\lambda^N(t-z)^{N-1}}{N!}\Big\},$$

где N — натуральное число (ниже будет указан алгоритм его выбора).

Таким образом, аппроксимирующее вырожденное ядро может быть записано в виде

$$\tilde K(z,t) = e^{\bar\lambda z}\Big\{\bar\lambda + \frac{\bar\lambda^2(t-z)}{2!} + \cdots + \frac{\bar\lambda^N(t-z)^{N-1}}{N!}\Big\}B(z,\bar\lambda) -$$
$$- \frac{A(z,\lambda)}{tz}e^{\lambda z}\Big\{\lambda + \frac{\lambda^2(\bar t-\bar z)}{2!} + \cdots + \frac{\lambda^N(\bar t-\bar z)^{N-1}}{N!}\Big\} +$$
$$+ \frac{1}{t}C(z,\lambda) + E(z,\lambda)D(t,\lambda) + F(z,\lambda)Q(t,\lambda), \quad (8)$$

т. е. $\tilde K(z,t)$ записано через элементарные функции в явном виде. Для оценки погрешности аппроксимации $R(z,t) = K(z,t) - \tilde K(z,t)$ достаточно оценить погрешности приближений его отдельных слагаемых. В частности, пользуясь остаточным членом формулы Тейлора в форме Лагранжа, имеем оценки

$$\Big|\frac{e^{\bar\lambda t} - e^{\bar\lambda z}}{t-z} - e^{\bar\lambda z}P_N(t-z,\bar\lambda)\Big| \equiv |e^{\bar\lambda z}|\frac{|\lambda|^{N+1}(t-z)^N}{(N+1)!}|e^{\theta(\lambda(t-z))}| \leqslant$$
$$\leqslant e^{3|\lambda|}\frac{|\lambda|^{N+1}2^N}{(N+1)!}.$$

Здесь учтено, что $|z| = |t| = 1$. Точно так же оценивается величина

$$\Big|\frac{e^{\lambda\bar t} - e^{\lambda\bar z}}{t-z} - e^{\lambda\bar z}\tilde P_N(t-z,\bar\lambda)\Big| \leqslant e^{3|\lambda|}\frac{|\lambda|^{N+1}2^N}{(N+1)!}.$$

Следовательно, для погрешности $|R(z,t)|$ справедливо неравенство

$$|R(z,t)| < e^{3|\lambda|}\frac{|\lambda|^{N+1}2^N}{(N+1)!}\Big(|\hat A(z)| + |\hat B(z)|\Big) \leqslant$$
$$\leqslant Ce^{4|\lambda|}\frac{|\lambda|^{N+1}2^N(|\lambda|^2+1)}{(N+1)!}\frac{1}{a^2(z_0(\lambda)) - b^2(z_0(\lambda))}, \quad (9)$$

где C не зависит от N.

Оценим резольвенту, соответствующую вырожденному ядру $\tilde K(z,t)$. Резольвента $\tilde\Gamma_N$ имеет вид

$$\tilde\Gamma_N = \frac{H_N(z,t,\lambda)}{\Delta_N(\lambda)}, \quad \Delta_N(\lambda) = \det|\delta_{ij} + \langle f_j, h_j\rangle|,$$

где $\Delta_N(\lambda)$ — определитель размерности $(2N+3)$, $H_N(\lambda)$ — определитель размерности $(2N+4)$.

Размерность $\Delta_N(\lambda)$ соответствует количеству слагаемых вырожденного ядра $\tilde{K}(z,t)$. Непосредственный подсчет позволяет $\tilde{K}(z,t)$ записать в виде

$$\tilde{K}(z,t) = \sum_{j=1}^{2N+3} f_j(z)h_j(t),$$

где $\{f_j(z)\}$ и $\{h_j(t)\}$ представляют линейно независимые системы функций. В то же время определитель $H_N(z,t,\lambda)$ отличается от $\Delta_N(\lambda)$ одной строкой и одним столбцом, которые выглядят так:

$$\|f_1(z), f_2(z), \ldots, f_{2N+3}(z), 0\|,$$

последний столбец H_N имеет вид

$$\|0, h_1(t), h_2(t), \ldots, h_{2N+3}(t)\|^{\top},$$

где значок «$\top$» означает транспонирование.

Оценим сверху модуль определителя H_N. Для этого заметим, что при фиксированном λ ($\lambda \neq 2$, $\operatorname{Re}\lambda \neq 1$) нормы каждой строки H_N ограничены некоторой величиной M, не зависящей от натурального числа N. Тогда согласно неравенству Адамара [18, стр. 192], имеем

$$|H_N| < M^{2N+4}. \tag{10}$$

Подставляя правые части неравенства (9) и (10) в неравенство (7), получим соотношение для выбора натурального числа N:

$$C_2\frac{|\lambda|^{N+1}2^N}{(N+1)!}\Big(1 + C_3\frac{M^{2N+4}}{|\Delta_N(\lambda)|}\Big) < 1, \tag{11}$$

где C_2, C_3 зависят от λ, но не зависят от N.

Поскольку $C^{N+2}/(N+1)! \to 0$, ясно, что левая часть стремится к нулю при $N \to \infty$. Таким образом, выбор N гарантируется. Сформулируем основной результат настоящей работы.

Теорема. *Пусть* $|\lambda| < R_1$ (R_1 — *фиксировано*) *и* $\lambda \neq 2$, $\operatorname{Re}\lambda \neq 1$. *Пусть* N *выбрано согласно* (11). *Определим* $\tilde{K}(z,t)$ *по формуле* (8), *а через* $\Delta_N(\lambda)$ *обозначим определитель Фредгольма, соответствующий вырожденному ядру* $\tilde{K}(z,t)$. *Если* $\Delta_N(\lambda) \neq 0$, *то* λ *является точкой резольвентного множества оператора Коши—Римана* (1)–(3).

В теореме охарактеризованы те λ, при которых неоднородная краевая задача со смещением для оператора Коши—Римана (1)–(3) всюду разрешима в классе непрерывных в смысле Гёльдера функций на единичном круге, причём показана явная конструкция, аппроксимирующая решение неоднородной задачи. Для этого достаточно $u(z)$, определяемое как решение неоднородного линейного интегрального уравнения Фредгольма второго рода, аппроксимировать решениями неоднородного линейного интегрального уравнения с вырожденными ядрами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ / REFERENCES

1. В. А. Стеклов, *Основные задачи математической физики*. Т. I, II, Петроград: Петроградский ун-т, 1922. [V. A. Steklov, *Osnovnye zadachi matematicheskoj fiziki* [Basic problems of mathematical physics], V. I, II, Petrograd, Petrogradskiy un-t, 1922 (In Russian)].
2. Ф. И. Франкль, "Обтекание профилей газом с местной сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения" // *Прикл. матем. и механика*, 1956. Т. 20, № 2. С. 196–202. [F. I. Frankl', "Subsonic flow past a profile with local supersonic zone bounded by a curved shock wave", *Prikl. Matem. i Mekhanika*, 1956, vol. 20, no. 2, pp. 196–202. (In Russian)].
3. А. М. Нахушев, "Новая краевая задача для одного вырождающегося гиперболического уравнения" // *Докл. АН СССР*, 1969. Т. 187, № 4. С. 736–739; A. M. Nakhushev, "A new boundary value problem for a degenerate hyperbolic equation", *Sov. Math., Dokl.*, 1969, vol. 10, no. 4, pp. 935–938.
4. А. В. Бицадзе, А. А. Самарский, "О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач" // *Докл. АН СССР*, 1969. Т. 185, № 4. С. 739–740; A. V. Bitsadze, A. A. Samarskii, "On some simple generalizations of linear elliptic boundary problems", *Sov. Math., Dokl.*, 1969, vol. 10, no. 4, pp. 398–400.
5. А. М. Нахушев, *Задачи со смещением для уравнений в частных производных*, М.: Наука, 2006. 287 с. [A. M. Nakhushev, *Zadachi so smeshcheniyem dlya uravnenii v chastnykh proizvodnykh* [Problems with shifts for partial differential equations], Moscow, Nauka, 2006, 287 pp. (In Russian)]
6. Е. Ю. Арланова, "Задача со смещением для уравнения Бицадзе–Лыкова" // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2012. № 4(29). С. 26–36. doi: 10.14498/vsgtu1103. [E. Yu. Arlanova, "The problem with shift for the Bitsadze–Lykov equation", *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2012, no. 4(29), pp. 26–36. (In Russian)].
7. А. М. Нахушев, "О современном состоянии краевых задач со смещением для основных типов уравнений в частных производных" / *Труды Третьей Всероссийской научной конференции* (29–31 мая 2006 г.). Часть 3, Дифференциальные уравнения и краевые задачи / Матем. моделирование и краев. задачи, Самара: СамГТУ, 2006. С. 170–173. [A. M. Nakhushev, "On the present state of boundary value problems with a shift for the main types of partial differential equations", *Trudy Tret'yey Vserossiyskoy nauchnoy konferentsii* [Proceedings of the Third All-Russian Scientific Conference] (29–31 May 2006). Part 3, Matem. Mod. Kraev. Zadachi, Samara, Samara State Technical Univ., 2006, pp. 170–173. (In Russian)].
8. Д. Е. Касымова, А. Б. Тунгатаров, "Об одной краевой задаче со смещением для уравнения Карлемана—Векуа с сингулярной точкой" / *Обобщенные аналитические функции и их приложения*, Межвузовский сб. научн. трудов, Караганда: КарГУ, 1997. С. 48–53. [D. E. Kasymova, A. B. Tungatarov, "On one boundary value problem with shift for Carleman–Vekua equation with a singular point", *Obobshchennyye analiticheskiye funktsii i ikh prilozheniya* [Generalized analytic functions and their applications], Karaganda, Karaganda State Univ., 1997, pp. 48–53. (In Russian)].
9. М. Отелбаев, А. Н. Шыныбеков, "О корректных задачах типа Бицадзе—Самарского" // *Докл. АН СССР*, 1982. Т. 265, № 4. С. 815–819; M. Otelbaev, A. N. Shynybekov, "On well-posed problems of Bicadze–Samarskii type", *Soviet Math. Dokl.*, 1982, vol. 26, no. 4, pp. 157–161.
10. Ying Wang, Yufeng Wang, "Two Boundary-Value Problems for the Cauchy–Riemann Equation in a Sector", *Complex Analysis and Operator Theory*, 2012, vol. 6, no. 6, pp. 1121–1138. doi: 10.1007/s11785-010-0107-0.
11. А. Ю. Тимофеев, "Краевая задача для обобщенного уравнения Коши–Римана в пространствах, описываемых модулем непрерывности" // *Уфимск. матем. журн.*, 2012. Т. 4, № 1. С. 146–152. [A. Y. Timofeev, "Boundary problem for the generalized Cauchy–

Riemann equation in spaces, described by the modulus of continuity", *Ufimsk. Mat. Zh.*, 2012, vol. 4, no. 1, pp. 146–152. (In Russian)].

12. А. С. Ильчуков, "О поведении решения краевой задачи для обобщенного уравнения Коши–Римана" // *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, 2013. № 2. С. 27–34. [A. S. Il'chukov, "On behaviour of solution of boundary value problem for generalized Cauchy–Riemann equation", *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2013, no. 2, pp. 27–34. (In Russian)].
13. К. Н. Оспанов, М. Отелбаев, "Краевые задачи для обобщенной системы Коши–Римана с негладкими коэффициентами" // *Докл. АН СССР*, 1985. Т. 283, № 1. С. 46–49; K. N. Ospanov, M. Otelbaev, "Boundary value problems for the generalized Cauchy-Riemann system with nonsmooth coefficients", *Soviet Math. Dokl.*, 1985, vol. 32, no. 1, pp. 40–42.
14. К. Н. Оспанов, М. Отелбаев, "Об обобщенной системе Коши–Римана с негладкими коэффициентами" // *Изв. вузов. Матем.*, 1989. № 3. С. 48–56; K. N. Ospanov, M. Otelbaev, "A generalized Cauchy–Riemann system with nonsmooth coefficients", *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, 1989, vol. 33, no. 3, pp. 75–89.
15. В. А. Михайлец, *Спектральные задачи с общими краевыми условиями*: Дисс. серт. ...докт. физ.-мат. наук, Киев, 1989. [V. A. Mikhailets, *Spektral'nyye zadachi s obshchimi krayevymi usloviyami* [Spectral problems with general boundary conditions], Dissert. Doct. Phys. & Math. Sci. Kiev, 1989 (In Russian)].
16. Д. К. Потапов, "Оценки дифференциального оператора в задачах со спектральным параметром для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями" // *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, 2010. № 5(21). С. 268–271. doi: 10.14498/vsgtu800. [D. K. Potapov, "Estimates of the DifferentialOperator in Problems with a Spectral Parameter for Elliptic-Type Equations with Discontinuous Nonlinearities", *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2010, no. 5(21), pp. 268–271. (In Russian)].
17. Н. С. Иманбаев, Б. Е. Кангужин, Ж. Киргизбаев, "О фредгольмовости одной спектральной задачи, связанной с оператором Коши—Римана" / *Вопросы устойчивости, прочности и управляемости динамических систем*, Межвузовский сб. научн. трудов, М.: РГОТУПС, 2002. С. 54–59. [N. S. Imanbaev, B. E Kanguzhin, Zh. Kirgizbaev, "On the Fredholm property of one spectral problem related to Cauchy-Riemann operator", *Voprosy ustoychivosti, prochnosti i upravlyayemosti dinamicheskikh sistem* [Questions of Stability, Durability and Controllability of the Dynamic System], Moscow, Russian State Open Technical Univ. of Railway Transport, 2002, pp. 54–59. (In Russian)].
18. Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь, *Лекции по функциональному анализу*, М.: Наука, 1979. 588 с.; F. Riesz, B. Sz.-Nagy, *Functional analysis*, New York, Frederick Ungar Publishing Co., 1955, xii+468 pp.
19. И. И. Кальмушевский, "О решениях некоторых интегральных уравнений с ядрами, зависящими от разности и суммы аргументов" // *Дифференц. уравнения*, 1980. Т. 16, № 5. С. 941–943. [I. I. Kal'mushevskiy, "On solutions of some integral equations with kernels depending on the difference and the sum of the arguments", *Differents. Uravneniya*, 1980, vol. 16, no. 5, pp. 941–943. (In Russian)].
20. Л. А. Сахнович, "О подобии операторов" // *Сиб. матем. журнал*, 1972. Т. 13, № 4. С. 868–883; L. A. Sakhnovich, "Similarity of operators", *Siberian Math. J.*, 1972, vol. 13, no. 4, pp. 604–615. doi: 10.1007/BF00971053.
21. И. А. Акбергенов, "О приближенном решении интегрального уравнения Фредгольма и об определении его собственных значений" // *Матем. сб.*, 1935. Т. 42, № 6. С. 679–698. [I. A. Akbergenov, "On approximate solution of the Fredholm integral equation and its eigenvalues", *Mat. sb.*, 1935, vol. 42, no. 6, pp. 679–698. (In Russian)].

Поступила в редакцию 29/IX/2013;
в окончательном варианте — 18/XI/2013;
принята в печать — 27/I/2014.

MSC: 34L10, 34B09, 34B10

EIGENVALUE PROBLEM FOR DIFFERENTIAL CAUCHY–RIEMANN OPERATOR WITH NONLOCAL BOUNDARY CONDITIONS

N. S. Imanbaev

Kh. Yasavi International Kazakh–Turkish University,
2, pl. Esim-Khan, Turkestan, 487010, Kazakhstan.

We consider the reduced spectral problem for the Cauchy–Riemann operator with nonlocal boundary conditions to Fredholm linear integral equation of the second kind with a continuous kernel. The corresponding Fredholm determinant is defined for all spectral parameters, excepting the points: two and one. Finding zeros of the Fredholm determinant recorded in this form is inefficient, because it is not an entire function of the spectral parameter and the main part of the determinant is not separated. Moreover, we study the structure of the kernel by the method shown above, and establish that the linear Fredholm integral equation could not be solved exactly. Therefore, for its approximate solution the results of I. Akbergenov have been applied, where the estimates of the magnitude of the difference between the exact and approximate solutions of the integral equation are given, main part of the kernel is separated. In this case, the spectral parameters are described under which the nonhomogeneous boundary value problem with shift for the Cauchy-Riemann equations is solvable everywhere in the class of continuous functions on the unit circle. Moreover, the design of the approximated solution of the nonhomogeneous boundary value problem is given.

Keywords: *Cauchy–Riemann operator, space of continuous functions, Fredholm property, resolvent set, problem with shift, kernel, Fredholm determinant.*

Received 29/IX/2013;
received in revised form 18/XI/2013;
accepted 27/I/2014.

ISSN: 2310-7081 (online), 1991-8615 (print); doi: http://dx.doi.org/10.14498/vsgtu1264

Citation: N. S. Imanbaev, "Eigenvalue Problem for Differential Cauchy–Riemann Operator with Nonlocal Boundary Conditions", *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. & Math. Sci.], 2014, no. 1 (34), pp. 25–36. doi: 10.14498/vsgtu1264. (In Russian)
Author Details: *Nurlan N. Imanbaev* (Cand. Phys. & Math. Sci.), Professor, Dept. of Mathematics.

E-mail address: imanbaevnur@mail.ru

ISSN 1991-346X

N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 2, Number 300 (2015), 73 – 77

ABOUT THE EIGEN VALUE PROBLEM OF CAUCHY-RIEMANN OPERATOR WITH HOMOGENEOUS BOUNDARY CONDITIONS OF DIRICHLET TASK TYPE

N. S. Imanbayev

A. Yasawi International Kazakh-Turkish University, Turkestan, Kazakhstan,
Institute of Mathematics and Mathematical Modelling MES RK, Almaty, Kazakhstan.
E-mail: imanbaevnur@mail.ru

Keywords: Cauchy-Riemann operator, space of continuous functions, Fredholm property, resolvent set, Dirichlet problem type, kernel, Fredholm determinant.

Abstract. In this paper we consider the problem on the Eigen values of the Cauchy-Riemann equations with homogeneous boundary conditions of the Dirichlet problem, where the quasi-singular integral equation is reduced and the index is computed and neter set conditions.

УДК 517.945

О ЗАДАЧЕ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ОПЕРАТОРА КОШИ-РИМАНА С ОДНОРОДНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ТИПА ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ

Н. С. Иманбаев

Международный Казахско-Турецкий университет им. А. Ясауи, Туркестан, Казахстан,
Институт математики и математического моделирования КН МОН РК, Алматы, Казахстан

Ключевые слова: оператор Коши-Римана, пространство непрерывных функций, фредгольмовость, резольвентное множество, задача типа Дирихле, ядро, детерминант Фредгольма.

Аннотация. В настоящей статье рассмотрена задача на собственные значение оператора Коши-Римана с однородными краевыми условиями типа задачи Дирихле, где редуцирована квазисингулярному интегральному уравнению, и вычислен индекс, а также установлена условие нетеровости.

Краевые условия, представляющие собой соотношения между значениями искомых функций, вычисленными в различных (переменных) точках, лежащих на границе, или внутри рассматриваемой области, возникающие в теплопроводности, были сформулированы В.А.Стекловым [1], а в газовой динамике – Ф.И. Франклем [2]. А.М. Нахушевым [3, 5] были поставлены и изучены сразу несколько задач данного типа, а для их названия предложен термин «со смещением». В статье А.В.Бицадзе и А.А.Самарского [4] впервые исследована задача «со смещением внутрь области». Содержание последних публикаций привело к осознанию качественной новизны краевых задач со смещениями для теории дифференциальных уравнений в частных производных. В последних публикациях [6] для уравнений Бицадзе-Лыкова поставлена задача со смещением с операторами Кобера-Эрдейи и М. Сайго в краевом условии, а также исследованы вопросы единственности и не единственности решения задачи при различных функциях и значениях констант, входящих в краевые условия. В работах [5] исследованосостояние краевых задач со смещением для основных

типов уравнений в частных производных. Краевая задача со смещением для уравнения Карлемана-Векуа с сингулярной точкой изучался в работах [7]. Обилие публикаций, где изучаются все более общие ситуации, производит иногда впечатление, что теория краевых задач «со смещением» уже завершена. Здесь, однако, имеется ряд менее изученных, но важных вопросов, в частности, задача о собственных значениях или об их аналитическом описании с помощью, например, асимптотических разложений. Применяемые сейчас методы функционального анализа и метод сведения к модельным уравнениям путем интегральных преобразований недостаточны для того, чтобы получить такую детальную информацию. С другой стороны, вряд ли можно надеяться получить, например, решение задачи на собственные значения для дифференциальных уравнений с частными производными в столь же явном виде, как это было сделано в аналогичной ситуации для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Общность перечисленных выше вопросов для уравнений с частными производными вынуждает в дальнейшем наложить на изучаемые операторы ряд весьма жестких ограничений. Выяснение правильных постановок задач и исследование специфических свойств решений для «неклассических» уравнений удобно начинать с рассмотрения идеализированных моделей, например, с рассмотрения уравнений с постоянными коэффициентами.

В связи с вышеизложенным, целью настоящей работы является:

- Исследование задачи на собственные значение для оператора Коши-Римана с однородными краевыми условиями типа задачи Дирихле

$$\frac{\partial\omega(z)}{\partial\bar{z}} = \lambda\omega(z) + f(z), \quad |z| < 1, \tag{1}$$

$$\operatorname{Re}\,\omega\,(z) = 0,\ |z| = 1, \tag{2}$$

$$\operatorname{Im}\omega(0) = 0, \quad z = 0, \tag{3}$$

где λ - спектральный параметр.

Описание общих регулярных краевых задач для дифференциального выражения Коши-Римана, разработаны Дж.Ф. Нейманом, М.И. Вишиком, А.А. Дезиным и в 1982 году М. Отелбаевым, А.Н. Шыныбековым [8].

С другой точки зрение вопросы разрешимости и поведения решения краевой задачи для обобщенного уравнения Коши-Римана глубоко изучались в работах [9-11]. Краевые задачи для обобщенной системы Коши-Римана с негладкими коэффициентами исследовались в работах [12].

В функциональном пространстве $C(|z| \le 1)$ рассмотрим операторы K, порождаемые дифференциальной операцией Коши-Римана

$$K\omega(z) = \frac{\partial\omega(z)}{\partial\bar{z}} \tag{4}$$

где $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, $\dfrac{\partial}{\partial\bar{z}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$ на множестве

$$D(K) \subset \left\{\omega(z) \in C(|z| \le 1), \frac{\partial\omega}{\partial\bar{z}} \in C(|z| < 1)\right\}.$$

Считаем, что оператор K имеет непустое резольвентное множество $\rho\ (K)$. Не умоляя общности, предполагаем, что

$$0 \in \rho(K) \tag{5}$$

т.е. существует ограниченный оператор K^{-1}. В работе [8] описано множество операторов $\{K\}$ со свойством (5).

Наиболее глубокие результаты при исследовании спектра эллиптических операторов имеются в работах [13]. В общем случае спектр эллиптического оператора существенно определяется спектральными свойствами граничного оператора. Однако выяснение зависимости спектра оператора Коши-Римана в исходных терминах граничных условий представляет актуальную (нерешенную) проблему. В работах [14, 15] исследована задача на собственные значения для оператора Коши-Римана с нелокальными краевыми условиями, в [16] с краевыми условиями типа

ISSN 1991-346X

Бицадзе-Самарского, где спектральная задача редуцирована к квазисингулярному интегральному уравнению с непрерывным ядром. Основным результатом работы являются следующие

Теорема 1. Решение спектральной задачи (1)-(3) определяется по формуле

$$\omega(z)=\frac{e^{\lambda\bar z}}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi|=1}u(\xi)\frac{\xi+z}{\xi-z}\cdot\frac{d\xi}{\xi}+iCe^{\lambda\bar z}+u(z)e^{\lambda\bar z}, \tag{6}$$

причем для вещественной функции $u(z)$ на окружности $|z|=1$ справедливо следующее квазисингулярное интегральное уравнение

$$a(z)u(z)+\frac{b(z)}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi|=1}\frac{u(\xi)}{\xi-z}d\xi+\oint\limits_{|\xi|=1}H(z,\xi,\lambda)u(\xi)d\xi=0\,,\ |z|=1, \tag{7}$$

где $a(z)=e^{\lambda\bar z}+e^{\bar\lambda z}, b(z)=e^{\lambda\bar z}-e^{\bar\lambda z}, H(z,\xi,\lambda)=\dfrac{e^{\lambda\bar z}-e^{\bar\lambda z}}{2\pi i}\cdot\dfrac{z}{\xi}\cdot\dfrac{1}{\xi-z}$ – непрерывное ядро.

КонстантаC из общего решения (6) представима в виде

$$\operatorname{Im}\omega(0)=\operatorname{Im}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi|=1}u(\xi)\cdot\frac{d\xi}{\xi}+iC+u(0)\right),$$

$$\operatorname{Im}\omega(0)=C=0.$$

Доказательство. Для доказательства теоремы общее решение уравнения (1), т.е. (6) подставляем в граничное условие (2). Тогда

$$\operatorname{Re}(\omega(z))=\operatorname{Re}\left(\frac{e^{\lambda\bar z}}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi|=1}u(\xi)\frac{\xi+z}{\xi-z}\cdot\frac{d\xi}{\xi}+iCe^{\lambda\bar z}+u(z)e^{\lambda\bar z}\right)=0,|z|=1.$$

Распишем вещественную часть комплексного числа в виде полусуммы комплексного числа и сопряженного, тогда приходим к соотношению при $|z|=1$

$$\frac{e^{\lambda\bar z}}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi|=1}u(\xi)\frac{\xi+z}{\xi-z}\cdot\frac{d\xi}{\xi}+iCe^{\lambda\bar z}+u(z)e^{\lambda\bar z}+\left(\frac{-e^{\bar\lambda z}}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi|=1}\overline{u(\xi)}\frac{\dfrac{\xi+z}{\xi z}}{\dfrac{z-\xi}{\xi z}}\cdot\frac{-\dfrac{d\xi}{\xi^2}}{\dfrac{1}{\xi}}-iCe^{\bar\lambda z}+\overline{u(z)}e^{\bar\lambda z}\right)=$$

$$=\left(e^{\lambda\bar z}+e^{\bar\lambda z}\right)u(z)+\frac{e^{\lambda\bar z}-e^{\bar\lambda z}}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi|=1}u(\xi)\frac{\xi+z}{\xi-z}\cdot\frac{d\xi}{\xi}+iC\left(e^{\lambda\bar z}+e^{\bar\lambda z}\right)=0 \tag{8}$$

Использовав условие (3), исключим вещественную константу C из последнего равенства. Так как $\dfrac{d\xi}{\xi}$ чисто мнимое число, учитывая, что $u(\xi)$ - вещественная функция, получим

$$\operatorname{Im}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\xi|=1}u(\xi)\cdot\frac{d\xi}{\xi}+iC+u(0)\right)=0,$$

при $z=0$.. Отсюда имеем $C=0$. Обозначая через $a(z)=e^{\lambda\bar z}+e^{\bar\lambda z}$, $b(z)=e^{\lambda\bar z}-e^{\bar\lambda z}$, $H(z,\xi,\lambda)=\dfrac{e^{\lambda\bar z}-e^{\bar\lambda z}}{2\pi i}\cdot\dfrac{z}{\xi}\cdot\dfrac{1}{\xi-z}$ в равенстве (8), приходим к (7).

Итак, спектральная задача (1) – (3) редуцирована квазисингулярному интегральному уравнению (7). Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Квазисингулярное интегральное уравнение (7) для $u(\xi)$ нётерово при условии, когда $e^{\bar\lambda z}\neq 0$. Больше того, индекс нётера $\aleph=\dfrac{1}{\pi i}\left[\ln(a(z)+b(z))\right]\Big|_{|z|=1}$ равен нулю при $e^{\bar\lambda z}\neq 0$,

где $\left[\bullet\right]\Big|_{|z|=1}$ - означает приращение функции, заключенной в квадратные скобки, при обходе $|z|=1$ в положительном направлении [17].

Доказательство. Поскольку выражения $a(z)+b(z)$ и $a(z)-b(z)$ комплексно сопряжены, следовательно, индекс $\aleph$ выражается формулой $\aleph=\frac{1}{\pi i}\Delta_{|z|=1}\arg(a(z)+b(z))$, здесь $\Delta_{|z|=1}$, $\arg(a(z)+b(z))$ - приращение $\arg(a(z)+b(z))$ вдоль $|z|=1$, пробегаемом в положительном направлении.

Нётеровость уравнения (7) определяется неравенствами $a(z)\neq 0$ или $b(z)\neq 0$ при всех $|z|=1$. Следовательно, нётеровость нарушается при выполнении

$$\begin{cases} e^{\lambda\bar{z}}+e^{\bar{\lambda}z}=0 \\ e^{\lambda\bar{z}}-e^{\bar{\lambda}z}=0 \end{cases} \Rightarrow e^{\lambda\bar{z}}=e^{\bar{\lambda}z}.$$

Таким образом, нётеровость гарантируется при $2e^{\bar{\lambda}z}\neq 0$.

Известно ([17], стр. 126), что $\arg(a(z)+b(z))=Arg(2e^{\bar{\lambda}z})=\mathrm{Im}\left(\bar{\lambda}z\right)$. Здесь учтено, что $b(z)$ - чисто мнимая, $a(z)$ - вещественная функция. Пусть окружность $|z|=1$ обходится против часовой стрелки. Найдем индекс $\aleph=\frac{1}{\pi}\Delta_{|z|=1}\mathrm{Im}(\bar{\lambda}z)$. Для вычисления приращения мнимой части $\bar{\lambda}z$ заметим, что когда z делает один оборот против часовой стрелки вдоль единичной окружности, величина $\bar{\lambda}z$ совершает такой же оборот вдоль окружности радиуса $|\lambda|$. При этом мнимая часть $\bar{\lambda}z$ изменяется на вертикальном отрезке от $-|\lambda|$ до $|\lambda|$ дваждый: один раз проходит от $-|\lambda|$ до $|\lambda|$ вверх, а затем совершает тот же путь в обратном направлении. Итак, приращение мнимой части величины $\bar{\lambda}z$ равно нулю, когда z делает один оборот вдоль единичной окружности. Следовательно, индекс $\aleph$ квазисингулярного интегрального уравнения (7) равен нулю. Теорема 2 доказана.

В заключении автор выражает благодарность академику НАН РК М. Отелбаеву и д.ф.-м.н., профессору Б.Е. Кангужину за плодотворное обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Стеклов В.А. Основные задачи математической физики. Т. I, II, Петроград: Петроградский университет, 1922.

[2] Франкль Ф.И. Обтекание профилей газом с местной сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения// Прикладная математика и механика. 1956. Т. 20, №2. С.196-202.

[3] Нахушев А.М. Новая краевая задача для одного вырождающегося гиперболического уравнения// Доклады АН СССР, 1969. Т.187, №4. С. 736-739.

[4] Бицадзе А.В., Самарский А.А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач// Доклады АН СССР, 1969. Т.185, №4. С. 739-740.

[5] Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: «Наука», 2006. 287 с.

[6] Арланова Е.Ю. Задача со смещением для уравнения Бицадзе-Лыкова// Вестник Самарского Гос. техн. университета. Сер. Физ.-мат. науки. 2012.- выпуск 4(29).- С. 26-36.

[7] Касымова Д.Е., Тунгатаров А.Б. Об одной краевой задаче со смещением для уравнения Карлемана-Векуа с сингулярной точкой// Межвузовский сборник научных трудов: «Обобщенные аналитические функции и их приложения».- Караганда: КарГУ, 1997.-С. 48-53.

[8] Отелбаев М., Шыныбеков А.Н. О корректных задачах типа Бицадзе-Самарского // Доклады АН СССР.–1982.– Т.265, №4.–С.815-819.

[9] Ying Wang, YufengWang Two Boundary-Value Problems for the Cauchy-Riemann Equation in a Sector// Complex Analysis and Operator Theory. 2012, Volume 6, issue 6, pp 1121-1138.

[10] Тимофеев А.Ю. Краевая задача для обобщенного уравнения Коши-Римана в пространствах, описываемых модулем непрерывности// Уфимский матем. журнал. Том 4, №1 (2012). – С. 146-152.

[11] Ильчуков А.С. О поведении решения краевой задачи для обобщенного уравнения Коши-Римана// Вестник Удмуртского университета. Сер. Матем. Мех. Компьютерные науки. 2013. Вып. 2.

[12] Оспанов К.Н., Отелбаев М. Краевые задачи для обобщенной системы Коши-Римана с негладкими коэффициентами // Доклады АН СССР.-1985.-Т.283.-№1. С.46-49.

[13] Михайлец В.А. Спектральные задачи с общими краевыми условиями: Автореф. дис... д.ф.-м.н.–Киев, 1989.–29 с.

[14] Иманбаев Н.С. О приближенном решении уравнений Коши-Римана и об определении их собственных значений. Автореф. дисс...к.ф.-м.н. –Алматы, КазНУ им. аль-Фараби. 1997. 21 с.

[15] Иманбаев Н.С. Задача о собственных значениях дифференциального оператора Коши-Римана с нелокальными краевыми условиями // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «физико-математические науки», №1(34)-2014.- С.25-36.

[16] Amanzholova A.B., Imanbaev N.S., Niyazymbetov A.D. On an inhomogeneous boundary value problem with shift into the region for the Cauchy-Riemann equations with spectral parameter // International Journal of Pure and Applied Mathematics. - V. 93, - №3, - 2014, P. 449-461.

[17] Титчмарш Е. Теория функций. – М.:Наука, 1980. – 463 с.

REFERENCES

[1] Steklov V.A. The main problems of mathematical physics. V.I, II, Petrograd: Petrograd University, 1922. (in Russ.).

[2] Frankl F.I. Airfoil gas with local supersonic zone, ending the direct shock wave. Applied Mathematics and Mechanics. 1956. V. 20, №2. p.196-202. (in Russ.).

[3] Nakhushev A.M. The new boundary value problem for a degenerate hyperbolic equation. Reports of the Academy of Sciences of the USSR, 1969. V.187, №4. p. 736-739. (in Russ.).

[4] Bitsadze A.V., Samarsky A.A. On some simple generalizations of linear elliptic boundary value problems. Reports of the USSR Academy of Sciences, 1969 V.185, №4. p. 739-740. (in Russ.).

[5] Nakhushev A.M. Problem with shift for partial differential equations. M .: "Nauka", 2006. 287 p. (in Russ.).

[6] Arlanova E.Yu. Problem with shift for Bitsadze-Lykov equation. Bulletin of the Samara State. tehn. University. Ser. phys.-math. 2012.- Issue 4 (29).- p. 26-36. (in Russ.).

[7] Kasymova D.E., Tungatarov A.B. A boundary value problem with shift for the Carleman-Vekua equation with a singular point. Interuniversity collection of scientific papers: "Generalized analytic functions and their applications" .- Karaganda: KarSU, 1997-p 48-53. (in Russ.).

[8] Otelbaev M., Shynybekov A.N. Well-posedness of Bitsadze-Samarsky. Reports of Akad 1982-V.265, №4.-p.815-819. (in Russ.).

[9] Ying Wang, YufengWang Two Boundary-Value Problems for the Cauchy-Riemann Equation in a Sector. Complex Analysis and Operator Theory. 2012, Volume 6, issue 6, pp 1121-1138.

[10] Timofeev A.Yu. Boundary value problem for the generalized Cauchy-Riemann equations in spaces described by modulus of continuity // Ufa Mat. magazine. Volume 4, №1 (2012). - p. 146-152. (in Russ.).

[11] Il'chuk A.S. On the behavior of solutions of boundary value problems for the generalized Cauchy-Riemann equations. Bulletin of Udmurt University. Ser. Mat. mech. Computer Science. 2013. Issue 2. (in Russ.).

[12] Ospanov K.N., Otelbaev M. Boundary problem for generalized Cauchy-Riemann system with nonsmooth coefficients. Reports of Akad, 1985. V.283.-№1. p.46-49. (in Russ.).

[13] Mikhailets V.A. Spectral problems with general boundary conditions: Author. dis ... D.Sc., Kiev, 1989.-29. (in Russ.).

[14] Imanbaev N.S. The approximate solution of Cauchy-Riemann equations and determination of their own values. Abstract. Diss ... Cand. Mathematical Sciences. Almaty, KazNU named after Al-Farabi. 1997. 21 pp. (in Russ.).

[15] Imanbaev N.S. The problem of the eigenvalues of differential Cauchy-Riemann operator with nonlocal boundary conditions. Bulletin of the Samara State Technical University. A series of "physical and mathematical sciences», №1 (34) -2014.- p.25-36. (in Russ.).

[16] Amanzholova A.B., Imanbaev N.S., Niyazymbetov A.D. On an inhomogeneous boundary value problem with shift into the region for the Cauchy-Riemann equations with spectral parameter. International Journal of Pure and Applied Mathematics. - V. 93, - №3, - 2014, P. 449-461. (in Russ.).

[17] Titchmarsh E. Theory of functions. - Moscow: Nauka, 1980. - 463 p. (in Russ.).

ДИРИХЛЕ ЕСЕБІ ТЕКТЕС БІРТЕКТІ ШЕТТІК ШАРТТАРМЕН БЕРІЛГЕН КОШИ-РИМАН ОПЕРАТОРЫНЫҢ МЕНШІКТІ МӘНДЕРІН ЗЕРТТЕУГЕ БЕРІЛГЕН ЕСЕП ТУРАЛЫ

Н. С. Иманбаев

Қожа Ахмет Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан, Қазақстан,
ҚР БжҒМ ҒК Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы, Қазақстан

Тірек сөздер: Коши-Риманоператоры, үзіліссіз функциялардың кеңістігі, фредгольмдік, резольвенттік жиын, Дирихле тектес есебі, ядро, Фредгольманықтауышы.

Аннотация. Дирихле тектес есебі түріндегі біртекті шекаралық шарттармен берілген, Коши-Риман дифференциалдық амалынан туындайтын оператордың меншікті мәндерін зерттеуге арналған есептің үзіліссіз ядролы квазисингулярлық интегралдық теңдеумен эквиваленттілігі дәлелденген, нетерлік шарты айқындалып, индексінің нөлге тең екендігі көрсетілген.

Поступила 17.03.2015 г.

ISSN 1682—0525

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 15 № 3 (57) 2015

Институт математики и математического моделирования
Алматы

ISSN 1682–0525. Математический журнал. *2015. Том 15. № 3 (57). С. 96–107*

УДК 517.95

Н.С. Иманбаев

Институт математики и математического моделирования
050010, Алматы, ул. Пушкина, 125, e-mail: imanbaevnur@mail.ru
Казахстанский инженерно-педагогический университет дружбы народов
160012, Шымкент, ул.Джангельдина, 13

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СВОЙСТВА БАЗИСНОСТИ СИСТЕМЫ КОРНЕВЫХ ВЕКТОРОВ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ ПРИ ИНТЕГРАЛЬНОМ ВОЗМУЩЕНИИ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ В НЕУСИЛЕННО РЕГУЛЯРНЫХ ЗАДАЧАХ ТИПА САМАРСКОГО-ИОНКИНА

В работе рассматривается оператор, заданный дифференциальным выражением двукратного дифференцирования и краевыми условиями типа Самарского-Ионкина. Эти условия являются регулярными, но не усиленно регулярными краевыми условиями. Исследуется вопрос устойчивости и неустойчивости свойства базисности системы собственных и присоединенных функций возмущенного оператора, получаемого при интегральном возмущении одного из краевых условий.
Ключевые слова: *оператор Штурма-Лиувилля, базисность, собственные и присоединенные функции, собственное значение, несамосопряженная задача, краевые условия, возмущение, устойчивость, задача Самарского-Ионкина.*

Keywords: *Sturm-Liouville operator, eigenfunctions, associated functions, eigenvalue, nonself-adjoint problem, boundary conditions, perturbation, stability, Samarskii-Ionkin problem.*
2010 Mathematics Subject Classification: 34B05, 34L05, 34L20

1 Введение

Рассматриваем дифференциальный оператор, заданный дифференциальным выражением

$$L_0(u) = -u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x),\ q(x) \in C[0,1],\ 0 < x < 1, \qquad (1)$$

и краевыми условиями общего вида

$$U_1(u) = a_{11}u'(0) + a_{12}u'(1) + a_{13}u(0) + a_{14}u(1) = 0, \qquad (2)$$

$$U_2(u) = a_{21}u'(0) + a_{22}u'(1) + a_{23}u(0) + a_{24}u(1) = 0. \qquad (3)$$

В случае, когда краевые условия (2), (3) являются усиленно регулярными, из результатов В.П. Михайлова [1] и Г.М. Кесельмана [2] следует базисность Рисса в $L_2(0,1)$ систем собственных и присоединенных функций (СиПФ) задачи. В случае, когда краевые условия являются регулярными, но не усиленно регулярными, вопрос о базисности систем СиПФ до конца окончательно еще не решен.

Введем в рассмотрение матрицу из коэффициентов краевых условий (2), (3):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}.$$

Через $A(ij)$ будем обозначать матрицу, составленную из i-го и j-го столбцов матрицы A, $A_{ij} = detA(ij)$. Пусть краевые условия (2), (3) являются регулярными, но не усиленно регулярными. Согласно [3, с. 73] при выполнении условий:

$$A_{12} = 0,\ A_{14} + A_{23} \neq 0,\ A_{14} + A_{23} = \mp(A_{13} + A_{24}), \qquad (4)$$

краевые условия (2), (3) будут эквивалентны регулярным, но не усиленно регулярным краевым условиям.

В [4] А.С. Макиным предложено все регулярные, но не усиленно регулярные краевые условия разделить на четыре типа. При этом им выделен один тип не усиленно регулярных краевых условий, при которых система СиПФ задачи (1)–(3) образует базис Рисса при любых потенциалах $q(x)$. В случае $q(x) \equiv 0$ задача о базисности системы СиПФ задачи с общими

регулярными краевыми условиями полностью решена в [5]. В работе [4] III-тип краевых условий определен в следующем виде:

$$A_{14} \neq A_{23}, \ A_{34} = 0.$$

Эти условия всегда эквивалентны краевым условиям, задаваемым матрицей A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Этот случай и будет предметом наших исследований в настоящей работе.

2 Постановка задачи и основные результаты

Задача (1)–(3) с краевыми условиями III- типа при $q(x) \equiv 0$ является несамосопряженной задачей в $L_2(0,1)$. Для случая несамосопряженного исходного оператора вопрос о сохранении свойств базисности при некотором (слабом в определенном смысле) возмущении исследовался в [6].

Свойство базисности Рисса системы собственных и присоединенных функций периодических и анти-периодических задач Штурма-Лиувилля исследовалось в [7]. В этой работе получены асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций периодических и анти-периодических задач Штурма-Лиувилля – задач с граничными условиями, которые являются не усиленно регулярными в случаях, когда $q(x)$ является комплекснозначной, абсолютно непрерывной функцией и $q(0) \neq q(1)$. С помощью этих асимптотических формул доказано, что корневые функции этих операторов образуют базис Рисса в пространстве $L_2(0,1)$ [8], [9].

В [10], [11] исследованы вопросы устойчивости базисных свойств периодической задачи для уравнения (1) при интегральном возмущении краевого условия (2) I-го типа, то есть при выполнении условий $A_{14} = A_{23}$, $A_{34} = 0$. А также в работе [12] аналогичные вопросы изучены при $q(x) \equiv 0$. В настоящей работе рассматривается близкая к исследованиям [12] спектральная задача при $q(x) \equiv 0$ с интегральным возмущением краевого условия (3), которое относится к III-му типу:

$$L_1(u) \equiv -u''(x) = \lambda u(x), \ 0 < x < 1, \tag{1'}$$

$$U_1(u) \equiv u'(0) - u'(1) = 0, \tag{2'}$$

$$U_2(u) \equiv u(0) = \int_0^1 \overline{p(x)}u(x)dx, \ p(x) \in L_2(0,1). \tag{3'}$$

Если $p(x) \equiv 0$, то задача (1′)–(3′) называется задачей Самарского-Ионкина [6].

Из работы [13] следует, что система СиПФ задачи (1′)–(3′) полна и минимальна в $L_2(0,1)$. При этом система СиПФ при любых $p(x)$ образует базис Рисса со скобками. Нашей задачей является демонстрация того, что свойство базисности в $L_2(0,1)$ системы СиПФ задачи (1′)–(3′) является неустойчивым при малых изменениях ядра $p(x)$ интегрального возмущения.

В [14] предложена методика построения характеристического определителя спектральной задачи при интегральном возмущении краевого условия. Вопросы условной базисности и исследование спектральных свойств нелокальных задач рассмотрены в [15]. Свойства базисности в $L_p(-1,1)$ корневых функций нелокальной задачи для уравнения с инволюцией изучены в [16]. Неустойчивость свойств базисности корневых функций оператора Шредингера с нелокальным возмущением краевого условия исследовалась в [17].

В [18], [19] рассмотрены некоторые спектральные свойства регулярных задач Штурма-Лиувилля со спектральным параметром в граничных условиях. Доказаны теоремы о разложении по собственным функциям в модифицированном гильбертовом пространстве $L_2(a,b)$.

3 Характеристический определитель задачи

Здесь воспользуемся методикой нашей работы [14] построения характеристического определителя задачи с интегральным возмущением краевого условия.

Одной из особенностей рассматриваемой задачи является то, что сопряженной к (1′)–(3′) является спектральная задача для нагруженного дифференциального уравнения:

$$L_1^*(v) = -v''(x) + p(x)v'(0) = \overline{\lambda}v(x),$$

$$V_1(v) \equiv v'(1) = 0, \ V_2(v) \equiv v(0) - v(1) = 0. \tag{5}$$

Построим сначала характеристический определитель спектральной задачи. Представляя общее решение уравнения (1′) при $\lambda \neq 0$ по формуле

$$u(x,\lambda) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x$$

и удовлетворяя его краевым условиям (2′), (3′), получаем линейную систему относительно коэффициентов C_1, C_2:

$$\begin{cases} C_1 \sin\sqrt{\lambda} + C_2\left(1-\cos\sqrt{\lambda}\right) = 0, \\ C_1\left[1 - \int_0^1 \overline{p(x)}\cos\sqrt{\lambda}x dx\right] - C_2 \int_0^1 \overline{p(x)}\sin\sqrt{\lambda}x dx = 0. \end{cases}$$

Ее определитель и будет характеристическим определителем задачи (1′)–(3′):

$$\Delta_1(\lambda) = \begin{vmatrix} \sin\sqrt{\lambda} & \left(1-\cos\sqrt{\lambda}\right) \\ 1 - \int_0^1 \overline{p(x)}\cos\sqrt{\lambda}x dx & -\int_0^1 \overline{p(x)}\sin\sqrt{\lambda}x dx \end{vmatrix}. \tag{6}$$

При $p(x) = 0$ получается характеристический определитель невозмущенной задачи Самарского-Ионкина. Обозначим его через $\Delta_0(\lambda) = 1 - \cos\sqrt{\lambda}$.

Число $\lambda_0^0 = 0$ является однократным собственным значением невозмущенной задачи Самарского-Ионкина, а $u_0(x) = +\sqrt{3}x$ – соответствующей собственной функцией.

Остальные собственные значения невозмущенной задачи (1′)–(3′) являются двукратными: $\lambda_k^0 = (2k\pi)^2$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, а $u_{k0}^0 = \sqrt{2}\sin 2k\pi x$ – соответствующая им собственная функция, $u_{k1}^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}x\cos 2k\pi x$ – присоединенная функция. С учетом условия биортогональности $\left(u_{k1}^0, v_{k1}^0\right) = 1$ имеем $v_{k1}^0 = 4\sqrt{2}\cos 2k\pi x$ собственную и $v_{k0}^0 = 2\sqrt{2}(1-x)\sin 2k\pi x$ – присоединенную функции сопряженной задачи к задаче Самарского-Ионкина.

Функцию $p(x)$ представим в виде биортогонального разложения в ряд Фурье по системе $\left\{v_{k0}^0, v_{k1}^0\right\}$:

$$p(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k0} v_{k0}^0 + \sum_{k=0}^{\infty} a_{k1} v_{k1}^0 =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_{k0} 2\sqrt{2}(1-x)\sin 2k\pi x + \sum_{k=0}^{\infty} a_{k1} 4\sqrt{2}(1-x)\cos 2k\pi x. \tag{7}$$

Используя (7), найдем более удобное представление определителя $\Delta_1(\lambda)$. Для этого сначала вычислим входящие в (6) интегралы. Несложные вычисления показывают, что

$$\int_0^1 \overline{p(x)} \cos\sqrt{\lambda}x dx = 4\sqrt{2\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\overline{a_{k1}}}{\lambda-(2k\pi)^2}+$$

$$+2\sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k\pi\overline{a_{k0}}}{\lambda-(2k\pi)^2}\left[1-\frac{2\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}}{\lambda-(2k\pi)^2}\right]\right),$$

$$\int_0^1 \overline{p(x)} \sin\sqrt{\lambda}x dx = -2\sqrt{2\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\overline{a_{k0}}}{\lambda-(2k\pi)^2}-2\sqrt{2}\sin\sqrt{\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k\pi\overline{a_{k0}}}{\lambda-(2k\pi)^2}+$$

$$+4\sqrt{2\lambda}(1-\cos\sqrt{\lambda})\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\overline{a_{k1}}}{\lambda-(2k\pi)^2}.$$

Используя полученное, определитель (6) стандартными преобразованиями приводится к виду:

$$\Delta_1(\lambda) = \Delta_0(\lambda)\cdot A(\lambda), \text{ где } A(\lambda) = \left[1+4\sqrt{2}\pi\sum_{k=1}^{\infty}\overline{a_{k0}}\frac{k}{\lambda-(2k\pi)^2}\right]. \qquad (8)$$

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Характеристический определитель спектральной задачи (1)–(3) при $q(x) \equiv 0$, то есть (1′)–(3′) с возмущенными краевыми условиями, представим в виде (8), где $\Delta_0(\lambda)$ – характеристический определитель невозмущенной спектральной задачи Самарского-Ионкина, a_{k0} – коэффициенты Фурье биортогонального разложения (7) функции $p(x)$ по системе СиПФ сопряженной невозмущенной спектральной задачи Самарского-Ионкина.*

Функция $A(\lambda)$ из (8) имеет полюса первого порядка в точках $\lambda = \lambda_k^0$, а функция $\Delta_0(\lambda)$ имеет нули второго порядка в этих же точках. Поэтому функция $\Delta_1(\lambda)$, представленная по формуле (8), является целой аналитической функцией переменного λ.

Характеристический определитель, который является целой аналитической функцией, связанной с задачей на собственные значения для дифференциального оператора третьего порядка с нелокальными краевыми условиями, исследовался в работе [20].

4 Частные случаи характеристического определителя

Очевидно, что, если при некотором индексе j коэффициенты разложения (7) $a_{j0} = 0$, тогда $\lambda_j^1 = \lambda_j^0$ является двукратным собственным значением возмущенной задачи (1′)–(3′). Поэтому более просто характеристический определитель (8) выглядит в случае, когда $p(x)$ представляется в виде (7) с конечной первой суммой. То есть, когда существует такой номер N, что $a_{k0} = 0$ для всех $k > N$. В этом случае формула (8) принимает вид

$$\Delta_1(\lambda) = \Delta_0(\lambda)\left[1 + 4\sqrt{2}\pi\sum_{k=1}^{N}\overline{a_{k0}}\frac{k}{\lambda - (2k\pi)^2}\right] \tag{9}$$

Из этого частного случая формулы (8) несложно обосновать следующее

Следствие 1. *Для любых наперед заданных чисел: комплексного $\widehat{\lambda}$ и натурального $\widehat{m}$ всегда существует такая функция $p(x)$, что $\widehat{\lambda}$ будет являться собственным значением задачи (1′)–(3′) кратности $\widehat{m}$.*

Из формулы (8) имеем две серии собственных значений возмущенной задачи (1′)–(3′):

$$\lambda_k^{(1)} = \lambda_k^0 = \left(2k\pi\right)^2;\ \lambda_k^{(2)} = \left[2k\pi + \overline{a_{k0}}\left(\sqrt{2} + O\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right)\right]^2.$$

Из анализа формулы (9) также легко видеть, что $\Delta_1\left(\lambda_k^0\right) = 0$ для всех $k > N$. То есть все собственные значения λ_k^0, $k > N$, невозмущенной задачи Самарского-Ионкина являются собственными значениями возмущенной спектральной задачи (1′)–(3′). Также нетрудно убедиться, что сохраняется и кратность собственных значений λ_k^0, $k > N$.

Более того, из условий ортогональности $p(x) \perp u_{j0}^0$, $p(x) \perp u_{j1}^0$ при всех $j > N$ следует, что в этом случае

$$\int_0^1 \overline{p(x)}u_{j0}^0(x)dx = \int_0^1 \overline{p(x)}u_{j1}^0(x)dx = 0.$$

Поэтому собственные $u_{j0}^0(x)$ и присоединенные $u_{j1}^0(x)$ функции невозмущенной задачи Самарского-Ионкина при всех $j > N$ удовлетворяют краевым условиям (2′), (3′) и, следовательно, являются собственными и присоединенными функциями возмущенной задачи (1′)–(3′). Значит, в этом случае система СиПФ возмущенной задачи (1′)–(3′) и система СиПФ невозмущенной задачи Самарского-Ионкина (образующая базис Рисса) отличаются друг от друга лишь по конечному числу первых членов. Следовательно, система СиПФ возмущенной задачи (1′)–(3′) также образует базис Рисса в $L_2(0,1)$.

Множество функций $p(x)$, представимых в виде конечного ряда (7), является плотным в $L_2(0,1)$. Таким образом, доказана

Теорема 2. *Пусть $A_{14} \neq A_{23}$, $A_{34} = 0$, то есть краевые условия (2′), (3′) принадлежат типу III. Тогда множество функций $p(x) \in L_2(0,1)$ таких, что система СиПФ возмущенной задачи Самарского-Ионкина (1′)–(3′) образует базис Рисса в $L_2(0,1)$, является плотным в $L_2(0,1)$.*

5 Неустойчивость свойства базисности

Покажем теперь, что свойство базисности системы СиПФ возмущенной задачи Самарского-Ионкина (1′)–(3′) является неустойчивым при сколь угодно малом интегральном возмущении краевого условия (3′).

Теорема 3. *Если $A_{14} \neq A_{23}$, $A_{34} = 0$, то есть краевые условия (2′), (3′) принадлежат типу III, тогда множество функций $p(x) \in L_2(0,1)$ таких, что система СиПФ возмущенной задачи Самарского-Ионкина (1′)–(3′) не образует даже обычного базиса в $L_2(0,1)$, также является плотным в $L_2(0,1)$.*

Доказательство. Очевидно, что множество функций $p(x) \in L_2(0,1)$, представимых в виде ряда (7), коэффициенты которого асимптотически (то есть, начиная с некоторого номера) обладают свойством $a_{k0} \neq 0$, $a_{k1} = 0$, будет плотным в $L_2(0,1)$. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что для таких функций $p(x)$ система СиПФ задачи не образует обычного базиса.

Пусть j – достаточно большой номер так, что $a_{j0} \neq 0$, $a_{j1} = 0$. Тогда из (8) нетрудно видеть, что $\lambda_j^0 = \left(2j\pi\right)^2$ является простым собственным значением задачи (1′)–(3′). Непосредственным вычислением легко получить,

19 Mukhtarov O.Sh., Aydemir K. Eigenfunction expansion for Sturm-Liouville Problems with transmission conditions at one interior point // Acta Math. Sci. B Engle. Ed. – 2015. – V. 35B, № 3. – P. 639-649.

20 Imanbaev N.S., Kanguzhin B.E., Kalimbetov B.T. On zeros the characteristic determinant of the spectral problem for a third-order differential operator on a segment with nonlocal boundary conditions // Adv. Difference Equa. – 2013. – V. 2013. – 5 pages.

21 Харди Г.Г.,Литтльвуд Дж.Е., Полиа Г. Неравенства. – М.:ИЛ. – 1948. – 456 с.

22 Функциональный анализ / Под ред. Крейна С.Г. – М., 1972.

Статья поступила в редакцию 03.10.15

Иманбаев Н.С. САМАРСКИЙ-ИОНКИН ТЕКТЕС КҮШЕЙТІЛГЕН ЕМЕС РЕГУЛЯРЛЫ ЕСЕПТЕРДЕГІ ШЕТТІК ШАРТТАРЫ ИНТЕГРАЛДЫ АУЫТҚЫҒАН ЖАҒДАЙЛАР ҮШІН ШТУРМ-ЛИУВИЛЛ ОПЕРАТОРЫНЫҢ ТҮБІРЛЕС ВЕКТОРЛАР ЖҮЙЕСІНІҢ БАЗИСТІК ҚАСИЕТІНІҢ ОРНЫҚТЫЛЫҒЫ ЖАЙЛЫ

Бұл жұмыста екі рет дифференциалданатын дифференциалдық өрнекпен және Самарский-Ионкин тектес шеттік шарттармен берілген дифференциалдық оператор қарастырылған. Бұл шарттар регулярлы, бірақ күшейтілген емес регулярлы шеттік шарттар болып табылады. Шеттік шарттарының біреуін интегралды ауытқуынан пайда болған ауытқыған оператордың меншікті және қосалқы функциялар жүйесінің базистік қасиетінің орнықтылығы мен орнықсыздығы мәселесі зерттелген.

Imanbaev N.S. ON STABILITY OF THE BASIS PROPERTY OF THE SYSTEM OF ROOT VECTORS OF THE STURM-LIOUVILLE OPERATOR WITH AN INTEGRAL PERTURBATION OF THE BOUNDARY CONDITIONS IN A NOT STRENGTHENED REGULAR PROBLEM OF THE SAMARSKII-IONKIN TYPE

In this paper we consider an operator given by the differential expression of twofold differentiation and boundary conditions of the Samarskii-Ionkin type. These conditions are regular but not strengthened regular. We investigate the problem of stability and instability of the basis property of the system of eigenfunctions and associated functions of a perturbed operator obtained by integral perturbation of one of the boundary conditions.

поэтому

$$\lim_{j\to+\infty}\left\|u_j^1(x)\right\|^2 = 1 + 2\lim_{j\to+\infty}\left|\frac{1}{a_{j0}}\right|^2 = +\infty.$$

Следовательно,

$$\lim_{j\to\infty}\left\|u_j^1\right\|\cdot\left\|v_j^1\right\| = \infty.$$

То есть не выполнено условие равномерной минимальности [22, с. 66] системы и, следовательно, она не образует даже обычного базиса в $L_2(0,1)$. Теорема 3 доказана.

Так как сопряженные операторы одновременно обладают свойством базисности Рисса корневых функций, то отсюда получаем

Следствие 2. *Пусть $A_{14} \neq A_{23}$, $A_{34} = 0$, то есть краевые условия (2′), (3′) принадлежат типу-III. Тогда множество P функций $p(x) \in L_2(0,1)$, для которых система собственных функций задачи (5) для нагруженного дифференциального уравнения образует базис Рисса в $L_2(0,1)$, всюду плотно в $L_2(0,1)$. Множество $L_2(0,1)\backslash P$ также всюду плотно в $L_2(0,1)$.*

Результаты настоящей работы, в отличие от [13], демонстрируют неустойчивость свойств базисности корневых функций задачи при интегральном возмущении краевых условий типа-III, являющихся регулярными, но не усиленно регулярными.

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования КН МОН РК, грант № 0825/ГФ4.

Литература

1 Михайлов В.П. О базисах Рисса в $L_2(0,1)$ // ДАН. – 1962. – Т. 144. № 5. – С. 981-984.

2 Кесельман Г.М. О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов // Изв. вузов СССР, Математика. – 1964. – № 2, – С. 82-93.

3 Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 352 с.

4 Макин А.С. О спектральных разложениях, отвечающих несамосопряженному оператору Штурма-Лиувилля // ДАН. – 2006. – Т. 406. № 1. – С. 21-24.

5 Lang P., Locker J. Spectral Theory of Two-Point Differential Operators Determined by $-D^2$ // J. Math. Anal. Appl. – 1990. – V. 146, № 1. – P. 148-191.

6 Ильин В.А., Крицков Л.В. Свойства спектральных разложений, отвечающих несамосопряженным операторам // Функциональный анализ. Итоги науки и техники. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. Обз. – М.:ВИНИТИ, 2006. – Т. 96. – С. 5-105.

7 Veliev O.A., Shkalikov A.A. On the Riesz basis property of eigen- and associated functions of periodic and anti-periodic Sturm-Liouville problems // Mat. Zametki. – 2009. – V. 85, № 5. – P. 671–686.

8 Kirac A.A. Riesz basis property of the root functions of non-selfadjoint operators with regular boundary conditions // Int. J. Math. Anal. (Ruse). – № 3. – 2009. – P. 1101–1109.

9 Kirac A.A. On the Riesz basisness of systems composed of root functions of periodic boundary value problems //Abstr. Appl. Anal. – 2015. – V. 2015, Article ID 945049, 7 pages.

10 Sadybekov M.A., Imanbaev N.S. On the basis property of root functions of a periodic problem with an integral perturbation of the boundary condition // Differ.Equ. – 2012. – V. 48, № 6. – P. 896–900.

11 Imanbaev N.S., Sadybekov M.A. On spectral properties of a periodic problem with an integral perturbation of the boundary condition // Eurasian Mathematical Journal. – 2013. – V. 4, № 3. – P. 53-62.

12 Макин А.С. О нелокальном возмущении периодической задачи на собственные значения // Дифференц. уравнения. – 2006. – Т.42, № 4. – С. 560-562.

13 Шкаликов А.А. О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями // Вестник МГУ. Математика и механика. – 1982. № 6. – С. 12-21.

14 Imanbaev N.S., Sadybekov M.A. Characteristic determinant of the spectral problem for the ordinary differential operator with the boundary load // Int. conf. on analysis and applied mathematics (ICAAM 2014). — AIP Conf. Proc. – 2014. – V. 1611. – P. 261-265.

15 Kal'menov T.Sh., Sadybekov M.A., Sarsenbi A.M. Biortogonal expansions in root functions of differential operators // Differ. Equ. – 2011. – V. 47, № 1. – P. 144-148.

16 Kritskov L.V., Sarsenbi A.M. Spectral properties of a nonlocal problem for the differential equation with involution // Differ. Equa. – 2015. – V. 51, № 8. – P. 984-990.

17 Imanbaev N.S., Kalimbetov B., Sarsenbi A.M. Study basicity of root functions of the Schrodinger operator with a non-local perturbation // Int. J. Pure Appl. Math. – 2013. – V. 89, № 3. – P. 433-438.

18 Bondarenko N. An Inverse Spectral Problem for the Matrix Sturm-Liouville Operator with a Bessel-Type Singularity // Int. J. Differ. Equation. – 2015. – Article ID 647396. – 4 pages.

19 Mukhtarov O.Sh., Aydemir K. Eigenfunction expansion for Sturm-Liouville Problems with transmission conditions at one interior point // Acta Math. Sci. B Engle. Ed. – 2015. – V. 35B, № 3. – P. 639-649.

20 Imanbaev N.S., Kanguzhin B.E., Kalimbetov B.T. On zeros the characteristic determinant of the spectral problem for a third-order differential operator on a segment with nonlocal boundary conditions // Adv. Difference Equa. – 2013. – V. 2013. – 5 pages.

21 Харди Г.Г.,Литтльвуд Дж.Е., Полиа Г. Неравенства. – М.:ИЛ. – 1948. – 456 с.

22 Функциональный анализ / Под ред. Крейна С.Г. – М., 1972.

Статья поступила в редакцию 03.10.15

Иманбаев Н.С. САМАРСКИЙ-ИОНКИН ТЕКТЕС КҮШЕЙТІЛГЕН ЕМЕС РЕГУЛЯРЛЫ ЕСЕПТЕРДЕГІ ШЕТТІК ШАРТТАРЫ ИНТЕГРАЛДЫ АУЫТҚЫҒАН ЖАҒДАЙЛАР ҮШІН ШТУРМ-ЛИУВИЛЛ ОПЕРАТОРЫНЫҢ ТҮБІРЛЕС ВЕКТОРЛАР ЖҮЙЕСІНІҢ БАЗИСТІК ҚАСИЕТІНІҢ ОРНЫҚТЫЛЫҒЫ ЖАЙЛЫ

Бұл жұмыста екі рет дифференциалданатын дифференциалдық өрнекпен және Самарский-Ионкин тектес шеттік шарттармен берілген дифференциалдық оператор қарастырылған. Бұл шарттар регулярлы, бірақ күшейтілген емес регулярлы шеттік шарттар болып табылады. Шеттік шарттарының біреуін интегралды ауытқуынан пайда болған ауытқыған оператордың меншікті және қосалқы функциялар жүйесінің базистік қасиетінің орнықтылығы мен орнықсыздығы мәселесі зерттелген.

Imanbaev N.S. ON STABILITY OF THE BASIS PROPERTY OF THE SYSTEM OF ROOT VECTORS OF THE STURM-LIOUVILLE OPERATOR WITH AN INTEGRAL PERTURBATION OF THE BOUNDARY CONDITIONS IN A NOT STRENGTHENED REGULAR PROBLEM OF THE SAMARSKII-IONKIN TYPE

In this paper we consider an operator given by the differential expression of twofold differentiation and boundary conditions of the Samarskii-Ionkin type. These conditions are regular but not strengthened regular. We investigate the problem of stability and instability of the basis property of the system of eigenfunctions and associated functions of a perturbed operator obtained by integral perturbation of one of the boundary conditions.

Hindawi Publishing Corporation
International Journal of Differential Equations
Volume 2015, Article ID 641481, 6 pages
http://dx.doi.org/10.1155/2015/641481

Research Article

On Stability of Basis Property of Root Vectors System of the Sturm-Liouville Operator with an Integral Perturbation of Conditions in Nonstrongly Regular Samarskii-Ionkin Type Problems

N. S. Imanbaev[1,2]

[1]*Department of Mathematics, Akhmet Yasawi International Kazakh-Turkish University, B. Sattarkhanov Avenue 29, Turkistan 161200, Kazakhstan*

[2]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan, Almaty 050010, Kazakhstan*

Correspondence should be addressed to N. S. Imanbaev; imanbaevnur@mail.ru

Received 19 July 2015; Revised 19 November 2015; Accepted 3 December 2015

Academic Editor: Patricia J. Y. Wong

We study a question on stability and instability of basis property of system of eigenfunctions and associated functions of the double differentiation operator with an integral perturbation of Samarskii-Ionkin type boundary conditions.

1. Introduction

In space $L_2(0,1)$ we consider an operator L_0, generated by the following ordinary differential expression:

$$L_0(u) \equiv -u''(x) + q(x)u(x), \qquad q(x) \in C[0,1],\ 0 < x < 1 \tag{1}$$

and the boundary value conditions of the general form:

$$U_j(u) = a_{j1}u'(0) + a_{j2}u'(1) + a_{j3}u(0) + a_{j4}u(1) = 0, \qquad j = 1, 2. \tag{2}$$

In the case when the boundary conditions (2) are strongly regular, the results of Mikhailov [1] and Kesellman [2] provide the Riesz basis property in $L_2(0,1)$ of the eigenfunction and associated functions (E&AF) system of the problem. In the case when the boundary conditions are regular but not strongly regular, the question on basis property of E&AF system is not yet completely resolved.

We introduce the matrix of coefficients of the boundary conditions (2):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

By $A(ij)$ we denote the matrix composed of the ith and jth columns of matrix A, $A_{ij} = \det A(ij)$. Let the boundary conditions (2) be regular but not strongly regular. According to [3, page 73], if the following conditions hold:

$$\begin{gathered} A_{12} = 0, \\ A_{14} + A_{23} \neq 0, \\ A_{14} + A_{23} = \mp(A_{13} + A_{24}), \end{gathered} \tag{4}$$

then the boundary conditions (2) are equivalent regular, but not strongly boundary, conditions.

In [4] Makin suggested dividing all regular, but not strongly regular, boundary conditions into four types:

(I) $A_{14} = A_{23}$, $A_{34} = 0$;

(II) $A_{14} = A_{23}$, $A_{34} \neq 0$;

(III) $A_{14} \neq A_{23}$, $A_{34} = 0$;

(IV) $A_{14} \neq A_{23}$, $A_{34} \neq 0$.

For example, boundary conditions with periodical or antiperiodical conditions form the (I)-type and can be determined in the following form:

$$A_{14} = A_{23},$$
$$A_{34} = 0. \tag{5}$$

That is, $a_{11} = -a_{12}$, $a_{13} = a_{14} = a_{21} = a_{22} = 0$, and $a_{23} = -a_{24}$. These conditions will be equivalent to boundary value conditions, given by matrix A, where the following options are possible:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ are periodical or}$$
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ are anti-periodical,} \tag{6}$$

and the boundary conditions with "the lowest coefficients" form the (II)-type. The boundary value conditions defined as $A_{14} \neq A_{23}$, $A_{34} = 0$ form the (III)-type. These conditions are always equivalent to boundary conditions, given by matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

This case will be the aim of our research in this paper.

Moreover, Makin [4] allocated the one type of non-strongly regular boundary value conditions, when E&AF system of the spectral problem

$$L_0(u) \equiv -u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x),$$
$$q(x) \in C[0,1], \ 0 < x < 1, \tag{8}$$

with boundary conditions of the general form (2) forms Riesz basis at any potentials $q(x)$.

When $q(x) \equiv 0$, the problem about basis property of E&AF system of the problem with general regular boundary conditions has been completely resolved in [5].

In [6, 7] questions on convergence of eigenfunction expansion of the Dirac operator in vector-matrix form and the Hill operator, forming Reitz basis in $L_2(0,1)$, with regular, but not strongly regular, boundary value conditions have been considered.

Questions on basisness of eigenfunctions of the differential operators with involution have been studied in [8–10].

2. Statement of the Problem and Main Results

The spectral problem (8)-(2) with boundary conditions of the (III)-type when $q(x) \equiv 0$ is a non-self-adjoint problem in $L_2(0,1)$. For the case of non-self-adjoint initial operator the question about preservation of the basis properties with some (weak in a certain sense) perturbation was studied in [11]. Riesz basis property of eigenfunctions and associated functions of periodic and antiperiodic Sturm-Liouville problems was considered in [12]. We obtain asymptotic formulas for eigenvalues and eigenfunctions of periodic and antiperiodic Sturm-Liouville problems with boundary conditions, which are not strongly regular, when $q(x)$ is a complex-valued absolutely continuous function, and $q(0) \neq q(1)$. Moreover, using these asymptotic formulas, we prove that the root functions of these operators form a Riesz basis in the space $L_2(0,1)$ [13, 14].

In [15, 16] questions on stability of basis properties of the periodic problem for (8) were investigated with integral perturbation of the boundary conditions (2), when $j = 2$, of the (I)-type, that is, at the conditions $A_{14} = A_{23}$, $A_{34} = 0$. Moreover, in [17], the similar questions have been studied when $q(x) \equiv 0$. In this paper we consider the spectral problem close to research of [17] when $q(x) \equiv 0$, with integral perturbation of the boundary conditions (2) when $j = 2$, belonging to the (III)-type:

$$L_1(u) \equiv -u''(x) = \lambda u(x), \quad 0 < x < 1, \tag{9}$$

$$U_1(u) \equiv u'(0) - u'(1) = 0, \tag{10}$$

$$U_2(u) \equiv u(0) = \int_{J_0}^{1} \overline{p(x)} u(x)\,dx, \quad p(x) \in L_2(0,1). \tag{11}$$

If $p(x) \equiv 0$, then problem (9)–(11) is called Samarskii-Ionkin problem [11].

From [18] it follows that the E&AF system of problem (9)–(11) is complete and minimal in $L_2(0,1)$. Moreover, the E&AF system at any $p(x)$ forms Riesz basis with brackets. Our aim is to show that the basis property in $L_2(0,1)$ of the E&AF system of problem (9)–(11) is not stable at small changes of kernel $p(x)$ of integral perturbation.

In [19] the construction method of the characteristic determinant of the spectral problem with integral perturbation of the boundary conditions has been suggested. The spectral properties of nonlocal problems have been considered in [20].

The basis properties in $L_p(-1,1)$ of root functions of the nonlocal problem for the equations with involution have been studied in [21]. Instability of basis properties of root functions of the Schrodinger operator with nonlocal perturbation of the boundary condition has been investigated in [22]. In [23, 24] they extended some spectral properties of regular Sturm-Liouville problems to the special type discontinuous boundary value problem, consisting of the Sturm-Liouville equation together with eigenparameter that depended on boundary conditions and two supplementary transmission conditions; we construct the resolvent operator and prove theorems on expansions in terms of eigenfunctions in modified Hilbert space $L_2(a,b)$.

3. Characteristic Determinant of the Problem

In this section we use the method of our paper [19] to construct the characteristic determinant of the problem with integral perturbation of the boundary condition.

One aspect of this problem is the fact that an adjoint problem to (9)–(11) is the spectral problem for the loaded differential equation [16]:

$$L_1^*(v) = -v''(x) + p(x)v'(0) = \bar{\lambda}v(x),$$
$$V_1(v) \equiv v'(1) = 0, \tag{12}$$
$$V_2(v) \equiv v(0) - v(1) = 0.$$

Firstly, we construct the characteristic determinant of the spectral problem. Representing the general solution of (9) by the following formula when $\lambda \neq 0$,

$$u(x,\lambda) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x, \tag{13}$$

and satisfying it by the boundary conditions (10) and (11), we obtain the linear system concerning the coefficients C_k:

$$\sqrt{\lambda}C_1 \sin\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda}C_2\left(1 - \cos\sqrt{\lambda}\right) = 0,$$
$$C_1\left[1 - \int_0^1 \overline{p(x)}\cos\sqrt{\lambda}x\,dx\right] \tag{14}$$
$$- C_2\int_0^1 \overline{p(x)}\sin\sqrt{\lambda}x\,dx = 0.$$

Its determinant is a characteristic determinant of problem (9)–(11):

$$\Delta_1(\lambda) = \begin{vmatrix} \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} & \sqrt{\lambda}\left(1-\cos\sqrt{\lambda}\right) \\ 1 - \int_0^1 \overline{p(x)}\cos\sqrt{\lambda}x\,dx & -\int_0^1 \overline{p(x)}\sin\sqrt{\lambda}x\,dx \end{vmatrix}. \tag{15}$$

When $p(x) = 0$, we get the characteristic determinant of the unperturbed Samarskii-Ionkin problem. Denote it by $\Delta_0(\lambda) = 1 - \cos\sqrt{\lambda}$. The number $\lambda_0^0 = 0$ is simple eigenvalue of the unperturbed Samarskii-Ionkin problem, and $u_0(x) = +\sqrt{3}x$ is the corresponding eigenfunction. Other eigenvalues of the unperturbed problem (9)–(11) are double: $\lambda_k^0 = (2k\pi)^2$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, and $u_{k0}^0 = \sqrt{2}\sin 2k\pi x$ is the eigenfunction corresponding to them; $u_{k1}^0 = (\sqrt{2}/2)x\cos 2k\pi x$ is the associated function. Due to the biorthogonal property $(u_{k1}^0, v_{k1}^0) = 1$, we have the eigenfunction $v_{k1}^0 = 4\sqrt{2}\cos 2k\pi x$ and the associated function $v_{k0}^0 = 2\sqrt{2}(1-x)\sin 2k\pi x$ of the problem adjoint to the Samarskii-Ionkin problem.

We represent function $p(x)$ as the biorthogonal expansion to the Fourier series by system $\{v_{k0}^0, v_{k1}^0\}$:

$$p(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k0}v_{k0}^0 + \sum_{k=0}^{\infty} a_{k1}v_{k1}^0$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_{k0}2\sqrt{2}(1-x)\sin 2k\pi x \tag{16}$$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty} a_{k1}4\sqrt{2}\cos 2k\pi x.$$

Using (16), we find more convenient representation of determinant $\Delta_1(\lambda)$. To do it, first, we evaluate integrals in (15). Simple calculations show that

$$\int_0^1 \overline{p(x)}\cos\sqrt{\lambda}x\,dx$$
$$= 4\sqrt{2\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\overline{a_{k1}}}{\lambda - (2k\pi)^2}$$
$$+ 2\sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2k\pi\overline{a_{k0}}}{\lambda - (2k\pi)^2}\left[1 - \frac{2\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}}{\lambda - (2k\pi)^2}\right]\right),$$

$$\int_0^1 \overline{p(x)}\sin\sqrt{\lambda}x\,dx$$
$$= -2\sqrt{2\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\overline{a_{k0}}}{\lambda - (2k\pi)^2}$$
$$- 2\sqrt{2}\sin\sqrt{\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k\pi\overline{a_{k0}}}{\lambda - (2k\pi)^2}$$
$$+ 4\sqrt{2\lambda}\left(1 - \cos\sqrt{\lambda}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\overline{a_{k1}}}{\lambda - (2\pi k)^2}.$$

Using the obtained results, determinant (15) is reduced to the following form by the standard conversions:

$$\Delta_1(\lambda) = \Delta_0(\lambda)\cdot A(\lambda),$$
$$A(\lambda) = \left[1 + 4\sqrt{2}\pi\sum_{k=1}^{\infty}\overline{a_{k0}}\frac{k}{\lambda - (2k\pi)^2}\right]. \tag{18}$$

$\Delta_0(\lambda) = 0$ implies that $\lambda_k^{(1)} = \lambda_k^0 = (2k\pi)^2$. Quantities $\lambda_k^{(2)} = [2k\pi + \overline{a_{k0}}(\sqrt{2} + \underline{\underline{O}}(1/\sqrt{k}))]^2$ are roots of equation $A(\lambda) = 0$.

These roots are eigenvalues of the perturbed spectral problems (9)–(11).

Therefore, we prove the following.

Theorem 1. *Characteristic determinant of the spectral problem with perturbed boundary value conditions (9)–(11) can be represented as (18), where $\Delta_0(\lambda)$ is the characteristic determinant of the unperturbed Samarskii-Ionkin spectral problem, a_{k0} are Fourier coefficients of the biorthogonal expansion (16) of the function $p(x)$ by the E&AF system of adjoint unperturbed Samarskii-Ionkin spectral problem.*

Function $A(\lambda)$ from (18) has a pole of the first order at points $\lambda = \lambda_k^0$, and function $\Delta_0(\lambda)$ has zeroes of the second order at these points. Hence, function $\Delta_1(\lambda)$ represented by formula (18) is an entire analytical function of variable λ.

The characteristic determinant, which is an entire analytical function, related to the problem on eigenvalues of differential operator of the third order with nonlocal boundary conditions has been studied in [25].

4. Partial Cases of the Characteristic Determinant

If coefficients $a_{j0} = 0$ of (16) for all indexes j, then $\lambda_j^1 = \lambda_j^0$ is a double eigenvalue of the perturbed problem (9)–(11).

More simple characteristic determinant (18) is in the case when $p(x)$ is represented as (16) with the finite first sum. That is, when there exists a number N such that $a_{k0} = 0$ for all $k > N$. In this case formula (18) takes the following form:

$$\Delta_1(\lambda) = \Delta_0(\lambda)\left[1 + 4\sqrt{2}\pi\sum_{k=1}^{N}\overline{a_{k0}}\frac{k}{\lambda - (2k\pi)^2}\right]. \tag{19}$$

From this partial case (18) it is easy to establish the following.

Corollary 2. *For any numbers given in advance, that is, complex $\hat{\lambda}$ and positive integer $\hat{m}$, there always exists function $p(x)$ such that $\hat{\lambda}$ will be eigenvalue of problem (9)–(11) of $\hat{m}$ multiplicity.*

From analysis of (19) it is also easy to see that $\Delta_1(\lambda_k^0) = 0$ for all $k > N$. That is, all eigenvalues λ_k^0, $k > N$, of the Samarskii-Ionkin problem are eigenvalues of the perturbed spectral problem (9)–(11). Moreover, it is not hard to see that multiplicity of the eigenvalues λ_k^0, $k > N$, is also preserved.

Furthermore, from the orthogonal condition $p(x) \perp u_{j0}^0$, $p(x) \perp u_{j1}^0$ at all $j > N$, it follows that, in this case,

$$\int_0^1 \overline{p(x)}u_{j0}^0(x)\,dx = \int_0^1 \overline{p(x)}u_{j1}^0(x)\,dx = 0. \tag{20}$$

Therefore, eigenfunctions $u_{j0}^0(x)$ and associated functions $u_{j1}^0(x)$ of the unperturbed Samarskii-Ionkin problem for all $j > N$ satisfy the boundary conditions (10), (11), and perturbed Samarskii-Ionkin spectral problem consequently. Hence, the functions are eigenfunctions and associated functions of the perturbed problem (9)–(11). Accordingly, in this case, E&AF system of the perturbed problem (9)–(11) and the E&AF system of the unperturbed Samarskii-Ionkin problem (forming Riesz basis) differ from each other only in a finite number of the first members. Hence, the E&AF system of the perturbed system (9)–(11) also forms Riesz basis in $L_2(0, 1)$.

A set of the functions $p(x)$, represented as the finite series (16), is dense in $L_2(0, 1)$. Therefore, we prove the following.

Theorem 3. *Let $A_{14} \neq A_{23}$, $A_{34} = 0$; that is, the boundary conditions (10), (11) are equivalent to the type-(III) with the integral perturbation. Then the set of the functions $p(x) \in L_2(0, 1)$ such that the E&AF system of the perturbed Samarskii-Ionkin problem (9)–(11) forms Riesz basis in $L_2(0, 1)$ is dense in $L_2(0, 1)$.*

5. Instability of Basis Property

Now we prove that the basis property of E&AF system of the perturbed Samarskii-Ionkin problem (9)–(11) is instable at arbitrarily small integral perturbation of the boundary condition (11).

Theorem 4. *If $A_{14} \neq A_{23}$, $A_{34} = 0$, that is, the boundary conditions (10), (11) belong to the type-(III), then the set of the functions $p(x) \in L_2(0, 1)$ such that E&AF system of the perturbed Samarskii-Ionkin problem (9)–(11) does not form even a simple basis in $L_2(0, 1)$ is also dense in $L_2(0, 1)$.*

Proof. It is obvious that the set of the functions $p(x) \in L_2(0, 1)$ represented as (16), coefficients of which asymptotically (i.e., beginning with some number) have the property $a_{k0} \neq 0$, $a_{k1} = 0$, is dense in $L_2(0, 1)$. Therefore, to prove the theorem, it is enough to show that for these functions $p(x)$ the E&AF system of the problem does not form a simple basis.

Let j be a large enough number such that $a_{j0} \neq 0$, $a_{j1} = 0$. Then from (18) it is not hard to see that $\lambda_j^0 = (2j\pi)^2$ is a simple eigenvalue of problem (9)–(11). By the direct calculation it is easy to get that the corresponding eigenfunction to this value of the adjoint problem (12) is $v_j^1(x) = \sqrt{2}\cos(2j\pi x)$ and $\|v_j^1(x)\|^2 = 1$.

We find an eigenfunction of problem (9)–(11). For large enough $\lambda = \lambda_j^0 = (2j\pi)^2$ the first equation of the system from Section 3 becomes an identity, and the second equation is transformed into the following form:

$$C_1\left[1 - \frac{\sqrt{2}}{4\pi}\frac{\overline{a_{j0}}}{j} + \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{k=1,k\neq j}^{\infty}\overline{a_{k0}}\frac{k}{j^2 - k^2}\right] - C_2\frac{\overline{a_{j0}}}{\sqrt{2}} = 0. \tag{21}$$

Since $a_{j0} \neq 0$, then we write C_2 by C_1. Therefore, eigenfunction of problem (9)–(11) has the following form:

$$u_j^1(x) = C_1\left\{\cos(2j\pi x) + \frac{\sqrt{2}}{\overline{a_{j0}}}\left[1 - \frac{\sqrt{2}}{4\pi}\frac{\overline{a_{j0}}}{j} + \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{k=1,k\neq j}^{\infty}\overline{a_{k0}}\frac{k}{j^2 - k^2}\right]\cdot\sin(2j\pi x)\right\}. \tag{22}$$

Choose constant C_1 from the biorthogonal condition $(u_j^1(x), v_j^1(x)) = 1$. It is easy to see that $C_1 = \sqrt{2}$. Finally, we find the eigenfunction of problem (9)–(11):

$$u_j^1(x) = \sqrt{2}\cos(2j\pi x) - \left[\frac{1}{\sqrt{2}j\pi} - \frac{2}{\overline{a_{j0}}}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{k=1,k\neq j}^{\infty}\overline{a_{k0}}\frac{k}{j^2 - k^2}\right)\right]\cdot\sin(2j\pi x). \tag{23}$$

By the direct calculation we find its norm in $L_2(0,1)$:

$$\left\|u_j^1(x)\right\|^2 = 1 + \frac{1}{2}\left|\frac{1}{\sqrt{2}j\pi} - \frac{2}{\overline{a_{j0}}}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{k=1,k\neq j}^{\infty}\overline{a_{k0}}\frac{k}{j^2-k^2}\right)\right|^2. \tag{24}$$

From the Young theorem [26, Theorem 276, page 240] it follows that

$$\lim_{j\to+\infty}\sum_{k=1,k\neq j}^{\infty}\overline{a_{k0}}\frac{k}{j^2-k^2} = 0. \tag{25}$$

Therefore,

$$\lim_{j\to+\infty}\left\|u_j^1(x)\right\|^2 = 1 + 2\lim_{j\to+\infty}\left|\frac{1}{a_{j0}}\right|^2 = +\infty. \tag{26}$$

Consequently, $\lim_{j\to\infty}\|u_j^1\|\cdot\|\vartheta_j^1\| = \infty$. Thus, necessary condition of basis property does not hold (see [11] and references in it) and, therefore, it does not form even a simple basis in $L_2(0,1)$.

Theorem 4 is proved. □

Since adjoint operators at the same time have the Riesz basis property of root functions, therefore, we obtain the following.

Corollary 5. *Let $A_{14} \neq A_{23}$, $A_{34} = 0$; that is, the boundary conditions (10), (11) belong to the type-(III). Then the set* **P** *of the functions $p(x) \in L_2(0,1)$ such that the system of eigenfunctions of the problem (12) for the loaded differential equation forms Riesz basis in $L_2(0,1)$ is everywhere dense in $L_2(0,1)$. The set $L_2(0,1)\backslash$**P** is also everywhere dense in $L_2(0,1)$.*

The results of the paper, in contrast to [18], show instability of basis property of root functions of the problem with an integral perturbation of boundary conditions of the type-(III), which are regular, but not strongly regular.

Conflict of Interests

The author declares that there is no conflict of interests regarding the publication of this paper.

Acknowledgment

This research is financially supported by a grant from the Ministry of Science and Education of the Republic of Kazakhstan (Grant no. 0825/GF4).

References

[1] V. P. Mikhailov, "On Riesz basis in L_2 (0,1)," *Doklady Mathematics*, vol. 144, no. 5, pp. 981–984, 1962 (Russian).

[2] G. M. Kesellman, "About unconditional convergence of expansion by eigenfunctions of some differential operators," *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika*, no. 2, pp. 82–93, 1964 (Russian).

[3] M. A. Naimark, *Linear Differential Operators*, Nauka, Moscow, Russia, 1969 (Russian).

[4] A. S. Makin, "On spectral expansions, responsible to non self-adjoint Sturm-Liouville operator," *Doklady Mathematics*, vol. 406, no. 1, pp. 21–24, 2006 (Russian).

[5] P. Lang and J. Locker, "Spectral theory of two-point differential operators determined by $-D^2$. I. Spectral properties," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 141, no. 2, pp. 538–558, 1989.

[6] P. Djakov and B. Mityagin, "Unconditional convergence of spectral decompositions of 1D Dirac operators with regular boundary conditions," *Indiana University Mathematics Journal*, vol. 61, no. 1, pp. 359–398, 2012.

[7] P. Djakov and B. Mityagin, "Convergence of spectral decompositions of Hill operators with trigonometric polynomial potentials," *Mathematische Annalen*, vol. 351, no. 3, pp. 509–549, 2011.

[8] A. M. Sarsenbi and A. A. Tengaeva, "On the basis properties of the root functions of two generalized spectral problems," *Differential Equations*, vol. 48, no. 2, pp. 306–308, 2012.

[9] M. A. Sadybekov and A. M. Sarsenbi, "Criterion for the basis property of the eigenfunction system of a multiple differentiation operator with an involution," *Differential Equations*, vol. [illegible], no. 8, pp. 1112–1118, 2012.

[10] A. A. Kopzhassarova, A. L. Lukashov, and A. M. Sarsenbi, "Spectral properties of non-self-adjoint perturbations for a spectral problem with involution," *Abstract and Applied Analysis*, vol. 2012, Article ID 590781, 5 pages, 2012.

[11] V. A. Il'in and L. V. Kritskov, "Properties of spectral expansions corresponding to non-self-adjoint differential operators," *Journal of Mathematical Sciences*, vol. 116, no. 5, pp. 3489–3550, 2003.

[12] O. A. Veliev and A. A. Shkalikov, "On the Riesz basis properties of eigen- and associated functions of periodic and anti-periodic Sturm-Liouville problems," *Matematicheskie Zametki*, vol. [illegible], no. 5, pp. 671–686, 2009 (Russian).

[13] A. A. Kirac, "Riesz basis property of the root functions of non-selfadjoint operators with regular boundary conditions," *International Journal of Mathematical Analysis*, vol. 3, no. 21–24, pp. 1101–1109, 2009.

[14] A. A. Kıraç, "On the Riesz basisness of systems composed of root functions of periodic boundary value problems," *Abstract and Applied Analysis*, vol. 2015, Article ID 945049, 7 pages, 2015.

[15] M. A. Sadybekov and N. S. Imanbaev, "On the basis property of root functions of a periodic problem with an integral perturbation of the boundary condition," *Differential Equations*, vol. 48, no. 6, pp. 896–900, 2012.

[16] N. S. Imanbaev and M. A. Sadybekov, "On spectral properties of a periodic problem with an integral perturbation of the boundary condition," *Eurasian Mathematical Journal*, vol. 4, no. 3, pp. 53–62, 2013.

[17] A. S. Makin, "About non-local perturbation of periodic problem on eigenvalues," *Differential Equations*, vol. 42, no. 4, pp. 556–562, 2006.

[18] A. A. Shkalikov, "On basis property of eigenfunctions of ordinary differential operators with integral boundary value conditions," *Vestnik MGU. Mathematics and Mechanics*, vol. [illegible], pp. 12–21, 1982.

[19] N. S. Imanbaev and M. A. Sadybekov, "Characteristic determinant of the spectral problem for the ordinary differential operator with the boundary load," *AIP Conference Proceedings*, vol. 1611, pp. 261–265, 2014, International Conference on Analysis and Applied Mathematics (ICAAM '14).

[20] T. S. Kal'menov, M. A. Sadybekov, and A. M. Sarsenbi, "Biorthogonal expansions in root functions of differential operators," *Differential Equations*, vol. 47, no. 1, pp. 144–148, 2011.

[21] L. V. Kritskov and A. M. Sarsenbi, "Spectral properties of a nonlocal problem for a second-order differential equation with an involution," *Differential Equations*, vol. 51, no. 8, pp. 984–990, 2015.

[22] N. S. Imanbayev, B. T. Kalimbetov, and A. M. Sarsenbi, "Study basicity of root functions of the Schrodinger operator with a non-Local perturbation," *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 89, no. 3, pp. 433–438, 2013.

[23] N. Bondarenko, "An inverse spectral problem for the matrix Sturm-Liouville operator with a Bessel-type singularity," *International Journal of Differential Equations*, vol. 2015, Article ID 647396, 4 pages, 2015.

[24] O. S. Mukhtarov and K. Aydemir, "Eigenfunction expansion for Sturm-Liouville problems with transmission conditions at one interior point," *Acta Mathematica Scientia B*, vol. 35, no. 3, pp. 639–649, 2015.

[25] N. S. Imanbaev, B. E. Kanguzhin, and B. T. Kalimbetov, "On zeros of the characteristic determinant of the spectral problem for a third-order differential operator on a segment with nonlocal boundary conditions," *Advances in Difference Equations*, vol. 2013, article 110, 2013.

[26] G. G. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Polya, *Inequalities*, vol. 456, Moscow, Russia, 1948 (Russian).

МЕЖДУНАРОДНАЯ НАУЧНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ

«АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ»

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Алматы-2015

Теорема 1. *Если выполнены условия* $\alpha = \beta \neq 1$, $\gamma \leq 0$, *то для решения задачи* (1)–(4) *имеет место оценка*

$$\| u(x,t) \|_0^2 + \int_0^t \| u_x(x,t) \|_0^2 \, d\tau \leq$$

$$\leq M \left(\int_0^t \| f(x,t) \|_0^2 \, d\tau + \int_0^t \mu^2(\tau) d\tau + \| \varphi(x) \|_0^2 \right), \qquad (5)$$

где $\| u \|_0^2 = \int_0^1 u^2(x,t) dx$, M – *известная постоянная, не зависящая от* T.

Из оценки (5) следует единственность и непрерывная зависимость решения от заданных функций. Методом редукции к интегральным уравнениям Вольтерра второго рода доказана существования решения задачи (1)–(4).

Литература

1. *Стеклов В.А.* Основные задачи математической физики. – М.: Наука, 1983. – 432 с.
2. *Нахушев А.М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных. М.: Наука, 2006. – 287 с.

УДК 517.43

Иманбаев Н.С.

Международный Казахско-Турецкий университет им. Х. Ясави (Казахстан, Туркестан)

e-mail: imanbaevnur@mail.ru

Характеристический определитель спектральной задачи для обыкновенного дифференциального оператора с интегральным возмущением краевого условия

В пространстве $L_2(0,1)$ рассмотрим оператор $\mathcal{L}_0$, порожденный обыкновенным дифференциальным выражением

$$l(u) = u^{(n)}(x) + q_2(x)u^{(n-2)}(x) + \cdots + q_n(x)u(x), \quad 0 < x < 1 \qquad (1)$$

и краевыми условиями

$$U_j(u) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} [\alpha_{jk} u^{(k)}(0) + \beta_{jk} u^{(k)}(1)] = 0, \quad j = \overline{1,n}. \qquad (2)$$

Предполагаем, что коэффициенты уравнения $q_k(x) \in C^{m-k}[0,1]$, $k = \overline{2,n}$; а формы $U_j(u)$ - линейно независимые.

Пусть $\mathcal{L}_1$ - оператор в $L_2(0,1)$, заданный выражением (1) и "возмущенными" краевыми условиями:

$$U_j(u) = 0, \ j = \overline{1,n}, \ j \neq m,$$
$$U_m(u) = \int_0^1 \overline{p_m(x)} u(x) dx, \ p_m(x) \in L_2(0,1). \tag{3}$$

Вопрос о базисности собственных и присоединенных функций (СиПФ) оператора $\mathcal{L}_1$ с более общими интегральными краевыми условиями положительно решен в [1], где доказана базисность Рисса со скобками при условии регулярности по Биркгофу краевых условий (2); а при дополнительном предположении усиленной регулярности - базисность Рисса СиПФ.

В настоящем докладе в предположении, что невозмущенный оператор $\mathcal{L}_0$ обладает системой СиПФ, образующей базис Рисса в $L_2(0,1)$, мы построим характеристический определитель спектральной задачи для оператора $\mathcal{L}_1$. На основании полученной формулы делаются выводы об устойчивости свойств базисности Рисса СиПФ задачи при интегральном возмущении краевого условия. Возможности формулы иллюстрируются на примере задачи Самарского-Ионкина с интегральным возмущением краевого условия.

Литература

1. *Шкаликов А.А.* О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями // Вестник МГУ. - 1982. - № 6. - С. 12-21.

УДК 517.43

Искакова У.А.

Институт математики и математического моделирования (Казахстан, Алматы)

e-mail: ulzada@list.ru

Причины некорректности локальной задачи Коши для уравнения Лапласа

Пусть $\Omega \subset R^2$ - односвязная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. Через $\Gamma \subset \partial\Omega$ обозначим односвязное не пустое подмножество границы.

В $\Omega \subset R^2$ рассмотрим задачу Коши для уравнения Лапласа

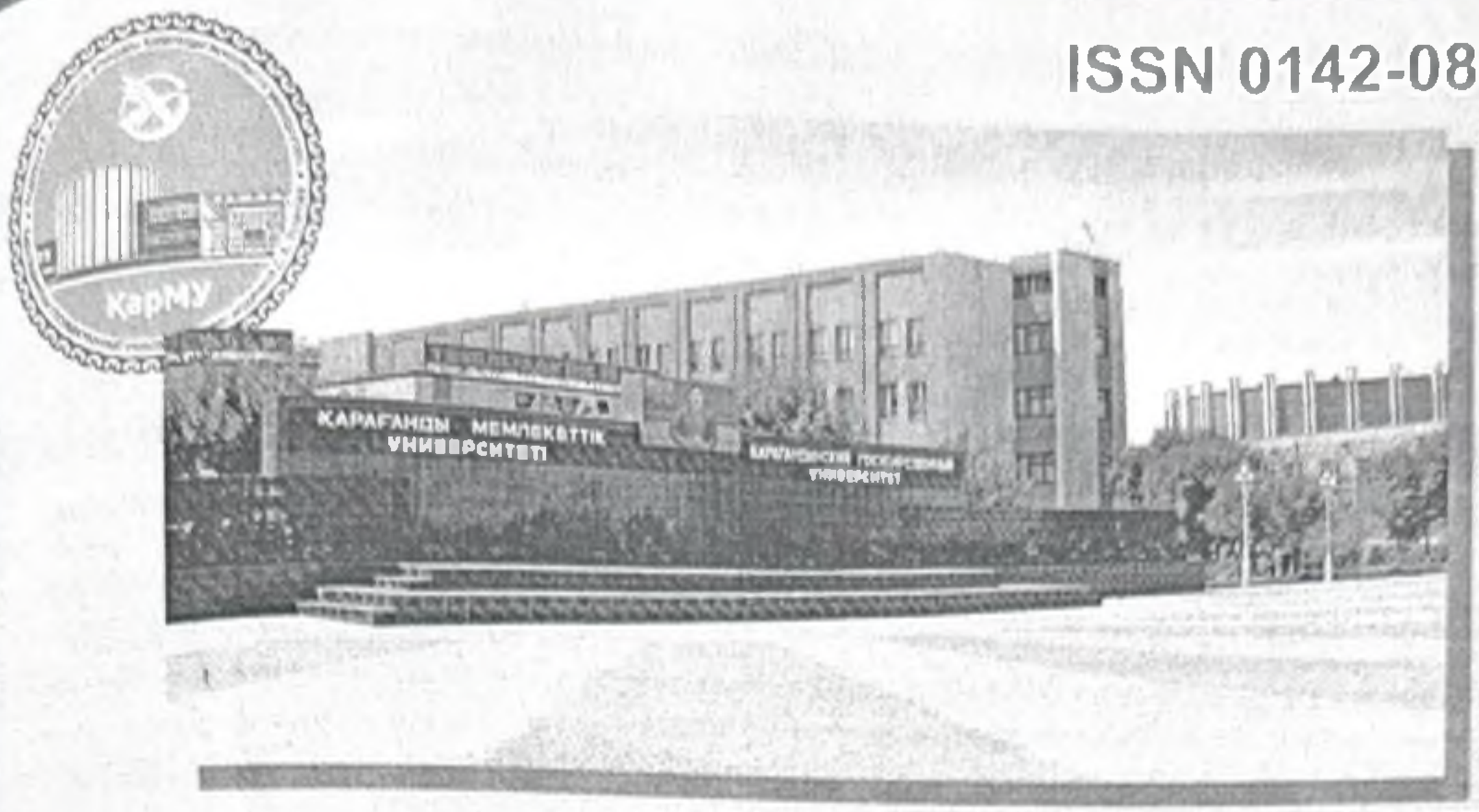
$$Lu \equiv \Delta u = f \tag{1}$$

$$u|_\Gamma = \varphi, \ \frac{\partial u}{\partial n}|_\Gamma = \psi. \tag{2}$$

Условная корректность задач вида (1)-(2) изучалась в работах [1], [2]. В [3] был предложен новый метод построения критерия корректности задачи Коши и смешанной задачи Коши для оператора Лапласа в прямоугольной области.

В настоящей работе причины некорректности задачи (1)-(2) устанавливаются для областей произвольного вида. Как и в [3] используется спектральное

ISSN 0142-0843



№ 2(82)/2016

МАТЕМАТИКА сериясы

Серия МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS Series

ҚАРАҒАНДЫ УНИВЕРСИТЕТІНІҢ ХАБАРШЫСЫ

ВЕСТНИК КАРАГАНДИНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

BULLETIN OF THE KARAGANDA UNIVERSITY

УДК 517.927.5

Н.С.Иманбаев

Казахстанский инженерно-педагогический университет Дружбы народов, Шымкент,
Институт математики и математического моделирования КН МОН РК, Алматы
(E-mail: imanbaevnur@mail.ru)

Характеристический определитель спектральной задачи для оператора Штурма-Лиувилля с интегральным возмущением краевого условия антипериодического типа

В статье рассмотрена задача, где исследованы базисные свойства системы корневых векторов для оператора Штурма-Лиувилля с интегральным возмущением краевого условия антипериодического типа. В рассматриваемой спектральной задаче определен характеристический детерминант.

Ключевые слова: оператор Штурма-Лиувилля, собственные значения, антипериодический тип, возмущенная краевая задача.

В пространстве $L_2(0.1)$ рассмотрим оператор L_0, порожденный обыкновенным дифференциальным выражением

$$L_0(u) \equiv -u''(x) + q(x)u(x), q(x) \in C[0,1], 0 < x < 1 \tag{1}$$

и краевыми условиями общего вида

$$U_j(u) = a_{j1}u'(0) + a_{j2}u'(1) + a_{j3}u(0) + a_{j4}u(1) = 0, j = 1, 2. \tag{2}$$

В случае когда краевые условия (2) являются усиленно регулярными, из результатов В.П.Михайлова [1] и Г.М.Кесельмана [2] следует базисность Рисса в $L_2(0,1)$ систем собственных и присоединенных функций (СиПФ) задачи. В случае когда краевые условия не усиленно регулярные, вопрос о базисности систем СиПФ остается еще открытым.

Введем в рассмотрение матрицу из коэффициентов краевых условий (2)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}.$$

Через $A(ij)$ будем обозначать матрицу, составленную из i-го и j-го столбцов матрицы A, $A_{ij} = = detA(ij)$. Пусть краевые условия (2) являются регулярными, но не усиленно регулярными. Согласно [3; 73] при выполнении условий

$$A_{12} = 0, A_{14} + A_{23} = 0;\ A_{14} + A_{23} = m(A_{13} + A_{24}) \tag{3}$$

краевые условия (2) будут эквивалентны регулярным, но не усиленно регулярным краевым условиям.

В [4] было предложено, что все регулярные, но не усиленно регулярные краевые условия разделить на четыре типа:

I. $A_{14} = A_{23}, A_{34} = 0$.

II. $A_{14} = A_{23}, A_{34} \neq 0$.

III. $A_{14} \neq A_{23}, A_{34} = 0$.

IV. $A_{14} \neq A_{23}, A_{34} \neq 0$.

Например, краевые условия с периодическими или антипериодическими условиями образуют тип I и определяются в следующем виде:

$$A_{14} = A_{23}, A_{34} = 0,$$

т.е. $a_{11} = -a_{12}, a_{13} = a_{14} = a_{21} = a_{22} = 0, a_{23} = -a_{24}$. Эти условия будут эквивалентны краевым условиям, задаваемым матрицей A, где возможны два варианта:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

периодические или

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

антипериодические.

Однако те же краевые условия с «младшими коэффициентами» образуют тип II. Краевые условия, определенные в виде $A_{14} \neq A_{23}, A_{34} = 0$, образуют тип III. Эти условия всегда эквивалентны краевым условиям, задаваемым матрицей A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом А.С.Макиным выделен один тип не усиленно регулярных краевых условий, при которых система СиПФ спектральной задачи [4]

$$L_0(u) \equiv -u'(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x), q(x) \in C[0,1], 0 < x < 1 \tag{4}$$

и краевыми условиями общего вида

$$U_j(u) = a_{j1}u'(0) + a_{j2}u'(1) + a_{j3}u(0) + a_{j4}u(1) = 0, j = 1, 2$$

образует базис Рисса при любых потенциалах $q(x)$.

В случае $q(x) \equiv 0$ задача о базисности системы СиПФ задачи с общими регулярными краевыми условиями полностью решена в [5]. Базисные свойства системы корневых векторов оператора двукратного дифференцирования при интегральном возмущении условий периодического типа были изучены в работах [6, 7].

Случай, образующий тип I, в частности, антипериодического типа с интегральным возмущением будет предметом наших исследований в настоящей работе.

Оператор L_0 Штурма-Лиувилля при $q(x) \equiv 0$ с краевыми условиями типа I является самосопряженной, а система ее собственных функций – обычной тригонометрической системой, образующей ортонормированный базис в пространстве $L_2(0,1)$. В [8] изучены вопросы базисности систем СиПФ периодической задачи для оператора Штурма-Лиувилля при $q(x) \equiv 0$. В настоящей работе рассматривается близкая к исследованиям [6-8] спектральная задача при $q(x) \equiv 0$, с интегральным возмущением одного из краевых условий (2) типа I

$$L_1(u) \equiv -u''(x) = \lambda u(x), 0 < x < 1; \tag{5}$$

$$U_1(u) \equiv u(0) + u(1) = 0; \tag{6}$$

$$U_2(u) \equiv u'(0) + u'(1) = \int_0^1 \overline{p(x)}u(x)dx, p(x) \in L_1(0,1). \tag{7}$$

Из работы [9] следует, что система СиПФ задачи (5)–(7) полна и минимальна в $L_2(0,1)$. При этом система СиПФ при любых $p(x)$ образует базис Рисса со скобками. Нашей задачей является построение характеристического определителя задачи (5)–(7).

Здесь воспользуемся методикой нашей работы [10] построения характеристического определителя задачи с интегральным возмущением краевого условия. Построение сопряженной задачи к периодической задаче рассмотрено в работе [11, 12], а к задаче Самарского-Ионкина — в [13, 14].

Следуя процедуре работы [12], получим возмущения самосопряженной задачи, а именно спектральную задачу для нагруженного дифференциального уравнения второго порядка следующего вида:

$$L_1^*(v) \equiv -v''(x) + p(x)v'(1) = \bar{\lambda}v(x);$$
$$V_1 \equiv v(0) + v(1) = 0, V_2(v) \equiv v'(0) + v'(1) = 0. \tag{8}$$

Задача (8) является несамосопряженным возмущением самосопряженной антипериодической задачи. В отличие от работы [8], здесь возмущение происходит за счет изменения уравнения.

Вопросы базисности корневых функций нагруженных дифференциальных операторов изучена в работе И.С. Ломова [15]. Ему удалось распространить метод спектральных разложений В.А.Ильина [16] на случай нагруженных дифференциальных операторов. Вопросы базисности функционально-дифференциальных уравнений были исследованы другим методом в работе [17].

Представляя общее решение уравнения (5) по формуле при $\lambda \neq 0$

$$u(x, \lambda) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x$$

и удовлетворяя его краевым условиям (6), (7), получаем линейную систему относительно коэффициентов C_k

$$\begin{cases} C_1(1 + \cos\sqrt{\lambda}) + C_2 \sin\sqrt{\lambda} = 0; \\ C_1[-\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} - \int_0^1 \overline{p(x)}\cos\sqrt{\lambda}x dx] + \\ +C_2[\sqrt{\lambda}(1 + \cos\sqrt{\lambda}) - \int_0^1 \overline{p(x)}\sin\sqrt{\lambda}x dx] = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Определитель линейной системы (9) будет характеристическим определителем задачи (5)–(7):

$$\Delta_1(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 + \cos\sqrt{\lambda} & \sin\sqrt{\lambda} \\ -\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} - \int_0^1 \overline{p(x)}\cos\sqrt{\lambda} & \sqrt{\lambda}(1 + \cos\sqrt{\lambda}) - \int_0^1 \overline{p(x)}\sin\sqrt{\lambda}. \end{pmatrix}. \tag{10}$$

При $p(x) = 0$ получается характеристический определитель невозмущенной задачи (5)–(7). Так как $\lambda \neq 0$, обозначим его через $\Delta_0(\lambda) = 2(1 + \cos\sqrt{\lambda})$. Число $\lambda_0^0 = 0$ не является собственным значением невозмущенной антипериодической задачи (5)–(7), т.е. является регулярной точкой, и принадлежит резольвентному множеству невозмущенного оператора Штурма-Лиувилля L_0. Число $\lambda_k^0 = (2(k-1)\pi)^2$ является двукратным собственным значением невозмущенной антипериодической задачи (5) – (7), а $u_{k0}^0 = \sqrt{2}\cos(2(k-1)\pi)x, u_{k1}^0 = \sqrt{2}\sin(2(k-1)\pi)x$ собственными функциями.

Функцию $p(x)$ представим в виде ряда Фурье по тригонометрической системе

$$p(x) = \sum_{k=1}^{\infty}[a_k \cos(2(k-1)\pi)x + b_k \sin(2(k-1)\pi)x]. \tag{11}$$

Используя (11), вычислим входящие в (10) интегралы и найдем более удобное представление определителя $\Delta_1(\lambda)$. После стандартного преобразования определитель $\Delta_1(\lambda)$ приводится к виду:

$$\Delta_1(\lambda) = 2(1 + \cos\sqrt{\lambda}) - 2\sin\sqrt{\lambda}\sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{(2k-1)\pi}{\lambda - ((2k-1)\pi^2)}, \tag{12}$$

где $\Delta_0(\lambda) = 2(1+\cos\sqrt{\lambda})$ — характеристический определитель невозмущенной антипериодической задачи. Таким образом, доказана

Теорема 1. Характеристический определитель антипериодической спектральной задачи с возмущенными краевыми условиями (5)–(7) представим в виде (12), где $\Delta_0(\lambda)$ — характеристический определитель невозмущенной спектральной антипериодической задачи; b_k — коэффициенты разложения (11) функции $p(x)$ в тригонометрический ряд Фурье.

Функция в виде ряда $\Sigma_{k=1}^{\infty} b_k \dfrac{(2k-1)\pi}{\lambda - ((2k-1)\pi)^2}$ из (12) имеет полюса первого порядка в точках $\lambda = \lambda_k^0$, а функция $2\sin\sqrt{\lambda}$ и $\Delta_0(\lambda)$ имеет нули второго порядка в этих же точках. Поэтому функция $\Delta_1(\lambda)$, представленная по формуле (12), является целой аналитической функцией переменного λ.

Замечание 1. Если рассмотреть возмущенную антипериодическую спектральную задачу (5), (7), (6), т.е. краевые условия (6)–(7) поменяем местами (7)–(6), тогда соответствующий характеристический определитель будет

$$\Delta_1(\lambda) = -\sqrt{\lambda}2(1+\cos\sqrt{\lambda}) + (1+\cos\sqrt{\lambda})\int_0^1 \overline{p(x)}\sin\sqrt{\lambda}x dx + \\ + \sin\sqrt{\lambda}\int_0^1 \overline{p(x)} cos\sqrt{\lambda}x dx. \tag{13}$$

Отличие (13) от (12) будет только в знаках.

В заключение отметим, что автор выражает благодарность члену-корреспонденту НАН РК, д.ф.-м.н., профессору М.А. Садыбекову за обсуждение результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке бюджетной программы «Фундаментальные и прикладные научные исследования» Министерства образования и науки Республики Казахстан (грант № 0825/ГФ4).

Список литературы

1 *Михайлов В.П.* О базисах Рисса в L2 (0,1) // ДАН. — 1962. — Т.144. — №5. — С. 981–984.

2 *Кесельман Г.М.* О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов // Изв. вузов СССР. Сер. Математика. — 1964. — № 2. — С. 82-93.

3 *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969. — 352 с.

4 *Макин А.С.* О спектральных разложениях, отвечающих несамосопряженному оператору Штурма-Лиувилля // ДАН. — 2006. — Т. 406. — №1. — С. 21–24.

5 *Lang P., Locker J.* Spectral Theory of Two-Point Differential Operators Determined by –D2 // Journal of Mathematical Analysis and Applications. — 1990. — Vol. 146. — No. 1. — P.148–191.

6 *Sadybekov M.A., Imanbaev N.S.* On the basis property of root functions of a periodic problem with an integral perturbation of the boundary condition // Differential Equations. — 2012. — Vol. 48 — № 6. — P. 896–900.

7 *Imanbaev N.S., Sadybekov M.A.* On instability of basis property of the root vectors system of the double differentiation operator with an integral perturbation of periodic type conditions // AIP Conference Proceedings. — 2015. — Vol. 1676 — № 020083. AIP Publ. — [ER]. Access mode: http://dx.doi.org/10.1063/1.4930509.

8 *Макин А.С.* О нелокальном возмущении периодической задачи на собственные значения // Дифференциальные уравнения. — 2006. — Т. 42. — № 4. — С. 560-562.

9 *Шкаликов А.А.* О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями // Вестн. МГУ. Сер. Математика и механика. — 1982. — № 6. — С. 12–21.

10 *Imanbaev N.S., Sadybekov M.A.* Characteristic determinant of the spectral problem for the ordinary differential operator with the boundary load // International conference on analysis and applied mathematics (ICAAM 2014): AIP Conference Proceedings. — 2014. – Vol. 1611. — P. 261–265.

11 *Иманбаев Н.С., Садыбеков М.А.* Базисные свойства корневых функций нагруженных дифференциальных операторов второго порядка // Докл. НАН РК. — 2010. — № 2. — С. 11–13.

12 *Imanbaev N.S., Sadybekov M.A.* On spectral properties of a periodic problem with an integral perturbation of the boundary condition // Eurasian Mathematical Journal. — 2013. — Vol. 4. — No. 3. — P. 53–62.

13 *Imanbaev N.S.* On the stability and instability of the basis properties of root functions of the Schrodinger equation with nonlokal perturbations of boundary condition // Bull. of Karaganda University. Ser. Mathematics. — 2013. — No. 4 (72). — P.25–30.

14 *Imanbaev N.S.* On stability of basis property of root vectors system of the with Sturm-Liouville operator with an integral perturbation of conditions in Nonstrongly regular Samarskii-Ionkin type problems // Differential Equations. — Vol. 2015. — P. 6. — [ER]. Access mode: http://dx.doi.org/10.1155/2015/641481.

15 *Ломов И.С.* Свойство базисности корневых векторов нагруженных дифференциальных операторов второго порядка на интервале // Дифференциальные уравнения. — 1991. — Т. 27. — № 1. — С. 80–94.

16 *Ильин В.А.* О связи между видами краевых условий и свойствами базисности равносходимости с тригонометрическим рядом разложений по корневым функциям несамосопряженного дифференциального оператора // Дифференциальные уравнения. — 1994. — Т. 30. — № 9. — С. 1516–1529.

17 *Гомилько А.М., Радзиевский Г.В.* Базисные свойства собственных функций регулярной краевой задачи для векторного функционально-дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. — 1991. — Т. 27. — № 3. — С. 385–395.

Н.С.Иманбаев

Интегралдық толқытылған антипериодты типтегі шеттік шарттармен берілген Штурм-Лиувилль операторының спектралдық есебінің сипаттамалық анықтауышы

Мақалада интегралдық толқытылған антипериодты типтегі шеттік шарттармен берілген Штурм-Лиувилль операторының түбірлік векторлар жүйесінің базистік қасиеттерін зерттеуге арналған есеп қарастырылған. Ол спектралдық есептің сипаттамалық анықтауышы ретінде белгіленген.

N.S.Imanbaev

Characteristic determinant of the spectral problem for the Sturm-Liouville operator with the perturbed boundary value conditions

We study a question on stability and instability of basis property of system of eigen functions of Sturm-Liouville operator with an integral perturbation of anti-periodic type boundary value conditions. The characteristic determinant of a spectral problem of Sturm-Liouville operator has been studied in integral perturbation of antiperiodic type boundary value conditions.

References

1 Mikhailov V.P. *Doklady Mathematics*, 1962, 144, 5, p. 981–984.

2 Kesellman G.M. *Russian Mathematics (Iz. VUZ)*, 1964, 2, p. 82–93.

3 Naimark M.A. *Linear Differential Operators*, Moscow: Nauka, 1969, 352 p.

4 Makin A.S. *Doklady Mathematics*, 2006, 406, 1, p. 21–24.

5 Lang P., Locker J. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1990, 146, 1, p. 148–191.

6 Sadybekov M.A., Imanbaev N.S. *Differential Equations*, 2012, 48, 6, p. 896–900.

7 Imanbaev N.S., Sadybekov M.A. *AIP Conference Proceedings*, 2015, 1676, [ER.] Access mode: http://dx.doi.org/10.1063/1.4930509.

8 Makin A.S. *Differential Equations*, 2006, 42, 4, p. 560–562.

9 Shkalikov A.A. *Moscow University Mathematics Bull.*, 1982, 6, p. 12–21.

10 Imanbaev N.S., Sadybekov M.A. *International conference on analysis and applied mathematics (ICAAM 2014): AIP Conference Proceedings*, 2014, 1611, p. 261–265.

11 Imanbaev N.S., Sadybekov M.A. *Reports of National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan*, 2010, 2, p. 11–13.

12 Imanbaev N.S., Sadybekov M.A. *Eurasian Mathematical Journal*, 2013, 4, 3, p. 53–62.

13 Imanbaev N.S. *Bull. of Karaganda State University*, Ser. Mathematics, 2013, 4 (72), p. 25–30.

14 Imanbaev N.S. *Differential Equations*, 2015, p. 6, [ER]. Access mode: http://dx.doi.org/10.1155/2015/641481.

15 Lomov I.S. *Differential Equations*, 1991, 27, 1, p. 80–94.

16 Illin V.A. *Differential Equations*, 1994, 30, 9, p. 1516–1529.

17 Gomillko A.M., Radzievski G.V. *Differential Equations*, 1991, 27, 3, p. 385–395.

Stability of the basis property of system of root functions of Sturm-Liouville operator with integral boundary condition

Nurlan Imanbaev

Citation: AIP Conference Proceedings **1789**, 040026 (2016); doi: 10.1063/1.4968479
View online: http://dx.doi.org/10.1063/1.4968479
View Table of Contents: http://aip.scitation.org/toc/apc/1789/1
Published by the American Institute of Physics

Stability of the basis property of system of root functions of Sturm-Liouville operator with integral boundary condition

Nurlan Imanbaev[1,2,a)]

[1]*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, 125 Pushkin str., 050010 Almaty, Kazakhstan*
[2]*Sout Kazakhstan State Pedagogical Institute, 13 A. Baitursynov str., 160012 Shymkent, Kazakhstan*

[a)]Corresponding author: imanbaev@math.kz

Abstract. In this work we study a question on stability and instability of the basis property of a system of eigenfunctions of a Sturm–Liouville operator with an integral perturbation of one of boundary conditions.

1 Introduction

Spectral theory of non-self-adjoint boundary value problems for ordinary differential equations on a finite interval goes back to the classical works of Birkhoff [1] and Tamarkin [2]. They introduced the concept of regular boundary conditions and investigated asymptotic behavior of eigenvalues and eigenfunctions of such problems. In their works Malamud and Oridoroga [3, 4] proved completeness of eigenfunctions and associated functions for a wide class of boundary value problems which includes regular boundary conditions. In space $L^2(0,1)$ we consider an operator L_0, generated by the following ordinary differential expression:

$$L_0(u) \equiv -u''(x) + q(x)u(x), \quad q(x) \in C[0,1],\ 0 < x < 1 \tag{1}$$

and the boundary value conditions of the form

$$U_j(u) = a_{j1}u'(0) + a_{j2}u'(1) + a_{j3}u(0) + a_{j4}u(1) = 0, \quad j = 1,2. \tag{2}$$

When the boundary conditions (2) are strongly regular, the results by Dunford [5, 6], Mikhailov [7] and Kesel'man [8] provide the Riesz basis property in $L^2(0,1)$ of the eigenfunctions and associated functions (E and AF) system of the problem. In the case when the boundary conditions are regular but not strongly regular, the question on basis property of E and AF system is not yet completely resolved. We introduce the matrix of coefficients of the boundary conditions (2):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}.$$

By $A(ij)$ we denote the matrix composed of the i-th and j-th columns of the matrix A, $A_{ij} = \det A(ij)$. Let the boundary conditions (2) be regular but not strongly regular. According to [9, p. 73], if the following conditions hold:

$$A_{12} = 0, \quad A_{14} + A_{23} \neq 0, \quad A_{14} + A_{23} = \mp(A_{13} + A_{24}), \tag{3}$$

then the boundary conditions (2) are regular, but not strongly regular boundary conditions.

Makin [10] suggested dividing all regular, but not strongly regular, boundary conditions into four types:

I $\quad A_{14} = A_{23}, A_{34} = 0;$
II $\quad A_{14} = A_{23}, A_{34} \neq 0;$
III $\quad A_{14} \neq A_{23}, A_{34} = 0;$
IV $\quad A_{14} \neq A_{23}, A_{34} \neq 0.$

Applications of Mathematics in Engineering and Economics (AMEE'16)
AIP Conf. Proc. 1789, 040026-1–040026-6; doi: 10.1063/1.4968479
Published by AIP Publishing. 978-0-7354-1453-2/$30.00

For example, periodical or antiperiodical boundary conditions form the type I, and can be determined in the following form:

$$A_{14} = A_{23}, \quad A_{34} = 0,$$

That is, $a_{11} = -a_{12}, a_{13} = a_{14} = a_{21} = a_{22} = 0$ and $a_{23} = -a_{24}$.

These conditions will be equivalent to matrix A, where the following two options are possible:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

are periodical or

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

are antiperiodical, and the same boundary conditions with "the lowest coefficients" form the type II. The boundary value conditions defined as $A_{14} \neq A_{23}, A_{34} = 0$ form the type III. These conditions are always equivalent to boundary conditions given by the matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

This case will be the aim of our research in this paper. Moreover, Makin [10] allocated the one type of non-strongly regular boundary value conditions, when E and AF systems of the spectral problem

$$L_0(u) \equiv -u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x), \quad q(x) \in C[0, 1], \ 0 < x < 1, \tag{4}$$

with boundary conditions of the form (2) forms the Riesz basis for any potentials $q(x)$. When $q(x) \equiv 0$, the problem about basis property of E and AF system of the problem with general regular boundary conditions has been completely resolved in [11]. In [12, 13] questions on convergence of eigenfunctions expansion of the Dirac operator in vector - matrix form and the Hill operator, forming the Riesz basis in $L^2(0, 1)$ with regular, but not strongly regular, boundary value conditions have been considered. For Dirac operators Mityagin [14] proved that periodic (or anti-periodic) boundary conditions give a rise to the Riesz system of 2D projections.

In [15, 16] by V.A. Il'yin's anti-a priori estimates it was shown that anti-a priori estimates without a positive exponent in the right-hand side of the inequality are necessary and sufficient conditions for an unconditional basis property in L_2 under an arbitrary choice of associated functions. And it is used in the proof of the well-posedness of boundary value problems [17].

2 Statement of the problem

When $q(x) \equiv 0$ the spectral problem (4)-(2) with boundary conditions of the type I is self-adjoint. The system of its eigenfunctions is an usual trigonometric system and forms an orthonormal basis in $L^2(0, 1)$. For the case of non-self-adjoint initial operator the question about preservation of the basis properties with some (weak in a certain sense) perturbation was shown in the type of several examples in [18].

Riesz basis property of eigenfunctions and associated functions of periodic and antiperiodic Sturm-Liouville problems was considered in [19]. In [20, 21] questions on stability of basis properties of the periodic problem for (4) were investigated with integral perturbation of the type I boundary conditions (2), when $j = 2$; that is, $A_{14} = A_{23}$, $A_{34} = 0$. Moreover, in [22] similar issues at $q(x) \equiv 0$ have been studied. In the present paper we consider a spectral problem close to research of [22] when $q(x) \equiv 0$, with integral perturbation of the boundary conditions (2) when $j = 2$, which belong to type I:

$$L_1(u) \equiv -u''(x) = \lambda u(x), \quad 0 < x < 1, \tag{5}$$

$$U_1(u) \equiv u'(0) + u'(1) = 0, \tag{6}$$

$$U_2(u) \equiv u(0) + u(1) = \int_0^1 \overline{p(x)}u(x)dx, \quad p(x) \in L^1(0, 1). \tag{7}$$

From [23] it follows that the E and AF system of problem (5)-(7) is complete and minimal in $L^2(0, 1)$. Moreover, the E and AF system for any $p(x)$ forms the Riesz basis with brackets. Our aim is to show that the basis property in

$L^2(0,1)$ of the E and AF system of problem (5)-(7) is unstable with respect to small changes of kernel $p(x)$ of integral perturbation. In [24] the method of constructing the characteristic determinant of the spectral problem with integral perturbation of the boundary conditions has been suggested.

The basis properties in $L^p(-1,1)$ of root functions of nonlocal problem for equations with involution have been studied in [25]. In [26] they considered the eigenfunction expansion for Sturm-Liouville problems with transmission conditions at one interior point. Boundary value problems with transmission conditions were investigated extensively in the recent years (see, for example, [27, 28, 29, 30]). Another special case of problem (5) - (7) with an integral perturbation of condition (6) was investigated in [31].

3 Characteristic determinant of a spectral problem

In this section we use the method from [24] to construct a characteristic determinant of the problem with integral perturbation of the boundary condition. Applying integration by parts, for smooth enough complex-valued functions $u(x)$ and $v(x)$ we obtain the Lagrange formula:

$$\begin{aligned}&\int_0^1 L_0(u)\overline{v(x)}\,dx - \int_0^1 u(x)\overline{L_0^*(v)}dx\\ &= [u'(0)+u'(1)]\overline{v(0)} + u'(1)[\overline{v(0)}+\overline{v(1)}]\\ &\quad -[u(0)+u(1)]\overline{v'(0)} - u(1)[\overline{v'(0)}+\overline{v'(1)}].\end{aligned} \tag{8}$$

Here $L_0^*(v)$ is an adjoint differential expression

$$L_0^* v = -v''(x) + \overline{q(x)}v(x), \quad 0 < x < 1. \tag{9}$$

Consequently the operator L_0^* corresponding to the operator L_0 is given by the differential expression (9) and the boundary conditions

$$V_1(v) = v(0) + v(1) = 0, \quad V_2(v) = v'(0) + v'(1) = 0. \tag{10}$$

Also the operator L_1^* corresponding to the operator L_1 is given by the loaded differential expression

$$L_1^*(v) = -v''(x) + \overline{q(x)}v(x) + p(x)v'(0), \quad 0 < x < 1, \tag{11}$$

and the antiperiodic boundary conditions (10). One of the aspects of this problem is the fact that the adjoint problem to (5)-(7) is a spectral problem for the loaded differential equation

$$\begin{aligned}&L_1^*(v) = -v''(x) + p(x)v'(0) = \bar{\lambda}v(x),\\ &V_1(v) = v(0) + v(1) = 0,\\ &V_2(v) = v'(0) + v'(1) = 0.\end{aligned} \tag{12}$$

First, we construct a characteristic determinant of the spectral problem (5)-(7). Presenting the general solution of equation (5) by the formula

$$u(x,\lambda) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x,$$

and with respect to the boundary conditions (6)-(7), we obtain the following linear system for the coefficients C_k:

$$C_1\left[1 + \cos\sqrt{\lambda} - \int_0^1 \overline{p(x)}\cos\sqrt{\lambda}x\,dx\right] + C_2\left[\sin\sqrt{\lambda} - \int_0^1 \overline{p(x)}\sin\sqrt{\lambda}x\,dx\right] = 0,$$

$$C_1\left[-\sin\sqrt{\lambda}\right] + C_2\left[1 + \cos\sqrt{\lambda}\right] = 0.$$

Its determinant will be the characteristic determinant of the spectral problem (5)-(7):

$$\Delta_1(\lambda) = \begin{pmatrix} 1 + \cos\sqrt{\lambda} - \int_0^1 \overline{p(x)}\cos\sqrt{\lambda}x\,dx & \sin\sqrt{\lambda} - \int_0^1 \overline{p(x)}\sin\sqrt{\lambda}x\,dx \\ -\sin\sqrt{\lambda} & 1 + \cos\sqrt{\lambda} \end{pmatrix}. \tag{13}$$

When $p(x) = 0$ we obtain the characteristic determinant of the unperturbed problem (5)-(7). It is denoted by $\Delta_0(\lambda) = 2(1 + \cos\sqrt{\lambda})$. The number $\lambda_k^0 = ((2k-1)\pi)^2$ is an eigenvalue of the unperturbed antiperiodic problem, and

$u_{k0}^0 = \sqrt{2}\cos((2k-1)\pi x)$, $u_{k1}^0 = \sqrt{2}\sin((2k-1)\pi x)$ are eigenfunctions. We represent the function $p(x)$ in the Fourier series form by the trigonometric system

$$p(x) = \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos((2k-1)\pi x) + b_k \sin((2k-1)\pi x)]. \tag{14}$$

Using (14), we find more convenient representation for the determinant $\Delta_1(\lambda)$. To do this, first, we calculate integrals in (13). Simple calculations show that

$$\int_0^1 \overline{p(x)} \cos(\sqrt{\lambda}x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[\bar{a}_k \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} + \bar{b}_k((2k-1)\pi)(\cos\sqrt{\lambda}+1)]}{\lambda - ((2k-1)\pi)^2},$$

$$\int_0^1 \overline{p(x)} \sin(\sqrt{\lambda}x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[\bar{a}_k \sqrt{\lambda}(1+\cos\sqrt{\lambda}) + \bar{b}_k((2k-1)\pi)\sin\sqrt{\lambda}]}{\lambda - ((2k-1)\pi)^2}.$$

Using these results and standard transformations, the determinant (13) is reduced to the form

$$\Delta_1(\lambda) = \Delta_0(\lambda) \cdot A(\lambda),$$

where

$$A(\lambda) = \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{b}_k \frac{(2k-1)\pi}{\lambda - ((2k-1)\pi)^2}\right]. \tag{15}$$

Hence, the following theorem is proved.

Theorem 1 *The characteristic determinant of the spectral problem (5)-(7) with the perturbed boundary value conditions can be represented in the form (15), where $\Delta_0(\lambda)$ is a characteristic determinant of the unperturbed antiperiodic spectral problem, b_k are coefficients of the expansion (14) of the function $p(x)$ into trigonometric Fourier series.*

The function $A(\lambda)$ in (15) has a first-order pole at the points $\lambda = \lambda_k^0$, and the function $\Delta_0(\lambda)$ has a second order zero at these points. Therefore, the function $\Delta_1(\lambda)$, represented by the formula (15), is an entire analytic function of the variable λ. The characteristic determinant, which is the entire analytical function, related with the problem on eigenvalues of differential operator of the third order with nonlocal boundary conditions has been studied in [32].

4 Case of the basis property of root functions

The characteristic determinant (15) looks simpler when

$$p(x) = \sum_{k=1}^{N} \left[a_k \cos((2k-1)\pi x) + b_k \sin((2k-1)\pi x)\right].$$

That is, there exists a number N such that $a_k = b_k = 0$ for all $k > N$. In this case, formula (15) takes the form

$$\Delta_1(\lambda) = \Delta_0(\lambda)\left[1 + \sum_{k=1}^{N} \overline{b_k} \frac{(2k-1)\pi}{\lambda - ((2k-1)\pi)^2}\right]. \tag{16}$$

From this particular case of formula (15), we have the following corollary.

Corollary *For any preassigned numbers (a complex $\hat{\lambda}$ and a positive integer $\hat{m}$) there always exists a function $p(x)$ such that $\hat{\lambda}$ will be an eigenvalue of problem (5)-(7) of multiplicity $\hat{m}$.*

From the analysis of formula (16) it is easy to see that $\Delta_1(\lambda_k^0) = 0$ for all $k > N$. That is, all eigenvalues λ_k^0, $k > N$, of the unperturbed periodic problem are the eigenvalues of the perturbed spectral problem (5)-(7). It is also not difficult to show that the multiplicity of the eigenvalues λ_k^0, $k > N$ is also preserved. Moreover, from the condition of orthogonality of the trigonometric system it follows that in this case:

$$\int_0^1 \overline{p(x)} u_{kj}^0(x)dx = 0, \quad j = \overline{0,1},\ k > N.$$

Thus, the eigenfunctions $u^0_{kj}(x)$ of the antiperiodic problem when $k > N$ satisfy the boundary value conditions (6)-(7) and, therefore, they are eigenfunctions of the perturbed problem (5)-(7). Hence, in this case the system of eigenfunctions of (5)-(7) and the system of eigenfunctions of the periodic problem (an orthonormal basis) differ from each other only in a finite number of the first members. Consequently, the system of eigenfunctions of (5)-(7) also forms the Riesz basis in $L^2(0, 1)$. The set of functions $p(x)$, that can be represented as a finite series (14), is dense in $L^1(0, 1)$. Thus, we have proved the following result.

Theorem 2 *Let $A_{14} = A_{23}$, $A_{34} = 0$; that is, the boundary conditions (6)-(7) belong to type I with integral perturbation. Then the set of functions $p(x) \in L^1(0, 1)$, such that the system of eigenfunctions of the perturbed problem (5)-(7) forms the Riesz basis in $L^2(0, 1)$, is dense in $L^1(0, 1)$.*

5 Instability of the basis property

Now we show that basis properties of eigenfunctions system of the perturbed problem (5)-(7) is unstable for an arbitrarily small integral perturbation of the boundary condition (6).

Theorem 3 *Suppose that $A_{14} = A_{23}$, $A_{34} = 0$; that is, the boundary conditions (6)-(7) belong to type I. Then the set of functions $p(x) \in L^1(0, 1)$, such that the system of eigenfunctions of the perturbed problem (5)-(7) does not form even a normal basis in $L^2(0, 1)$, is dense in $L^1(0, 1)$.*

Proof. Let in (14) the coefficients $b_k \neq 0$ for all sufficiently large k. Then from (15) we note that $\lambda = \lambda^0_k$ is a simple eigenvalue of problem (5)-(7). By direct calculation we get that $u^1_k = b_k \cos((2k-1)\pi)x - a_k \sin((2k-1)\pi)x$ are eigenfunctions of (5)-(7), corresponding to $\lambda^0_k = ((2k-1)\pi)^2$. Moreover, the eigenfunction of the dual problem (12), corresponding to the eigenvalue λ^0_k, is $v^1_k(x) = c_k \cos((2k-1)\pi)x$.

Since the eigenfunctions of the dual problems form a biorthogonal system, then we have the equality of the scalar product $(u^1_k, v^1_k) = 1$. Hence, it is easy to obtain $b_k \bar{c}_k = 2$. Therefore,

$$\|u^1_k\| \cdot \|v^1_k\| = \sqrt{1 + |\frac{a_k}{b_k}|^2}. \tag{17}$$

Denote by $\sigma_N(x)$ a partial sum of the Fourier series (14). It is obvious, that the set of functions, which can be represented as the infinite series

$$\bar{p}(x) = \sigma_N(x) + \sum_{k=N+1}^{\infty} [\bar{a}_k \cos((2k-1)\pi x) + \bar{b}_k \sin((2k-1)\pi x)],$$

where $\bar{a}_k = 2^{-k}$, $\bar{b}_k = 2^{-k}/k$, $k > N$, is dense in $L^1(0, 1)$. However, from (17) it follows that for such kind of functions $\bar{p}(x)$ for the corresponding eigenfunctions systems of the direct and conjugate problems there holds: $\lim_{k\to\infty} \|u^1_k\|\|v^1_k\| = \infty$.

That is, the condition of uniform minimal property (see [18] and references in it) of the system does not hold, and therefore, it does not form even a basis in $L^2(0, 1)$. □

Since adjoint operators possess the Riesz basis property of the root functions, we obtain the corollary.

Corollary *Suppose that $A_{14} = A_{23}$, $A_{34} = 0$, that is boundary value conditions (6)-(7) belong to type I. Then the set P of functions $p(x) \in L^1(0, 1)$, such that the system of eigenfunctions of (12) for the loaded differential equations forms the Riesz basis in $L^2(0, 1)$, is everywhere dense in $L^1(0, 1)$. The set $L^1(0, 1)\backslash P$ is also everywhere dense in $L^1(0, 1)$.*

The results of this paper, in contrast to [23], demonstrate instability of basis properties of the root functions of the problem with an integral perturbation of the boundary value conditions of type I, which are regular, but not strongly regular.

ACKNOWLEDGMENTS

This research is financially supported by a grant from the Ministry of Science and Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. 0825/GF4). This publication is supported by the target program 0085/PTSF-14 from the Ministry of Science and Education of the Republic of Kazakhstan.

REFERENCES

[1] G.D. Birkhoff, Trans. Amer. Math. Soc. 9, 373–395 (1908).
[2] I.D. Tamarkin, Rend. Circ. Math. Palermo 34:2, 345–382 (1912).
[3] M.M. Malamud and L.L. Oridoroga, Functional Analysis and Applications 34:3, 88–90 (2000).
[4] M.M. Malamud and L.L. Oridoroga, Doklady Mathematics 82:3, 809–905 (2010).
[5] N. Dunford, Bull. Amer. Math. Soc. 64, 217–274 (1958).
[6] N. Dunford and J. Schwartz, *Linear Operators. Part III, Spectral Operators* (Wiley, New-York, 1971).
[7] V.P. Mikhailov, Doklady Mathematics 144:5, 981–984 (1962). (in Russian).
[8] G.M. Kesel'man, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Math. 2, 82–93 (1964). (in Russian).
[9] M.A. Naimark; *Linear Differential Operators* (Ungar, New York, 1967).
[10] A.S. Makin, Doklady Mathematics 406:1, 21–24 (2006).
[11] P. Lang and J. Locker, J. Math. Anal. And Appl. 146:1 148–191 (1990).
[12] P. Djakov and B. Mityagin, Indiana University. Math. Jornal 61, 359–398 (2012).
[13] P. Djakov and B. Mityagin, Math. Ann. 351, 509–540 (2011).
[14] B. Mityagin, Dyn. Partial Differ. Equ. 1, 125–191 (2004).
[15] M.A. Sadybekov, and A.M. Sarsenbi, Differential Equations 44:5, 685–691 (2008).
[16] M.A. Sadybekov, and A.M. Sarsenbi, Doklady Mathematics 77:3, 398–400 (2008).
[17] M.A. Sadybekov, and A.M. Sarsenbi, AIP Conference Proceedings 1470 (American Institute of Physics, Melville, NY, 2012), 225-227.
[18] V.A. Il'in and L.V. Kritskov, Journal of Mathematical Sciences 116:5, 3489–3550 (2003).
[19] O.A. Veliev and A.A. Shkalikov, Mathematical Notes 85: 5-6, 647–660 (2009).
[20] N.S. Imanbaev and M.A. Sadybekov, Eurasian Mathematical Journal 4:3, 53–62 (2013).
[21] M.A. Sadybekov and N. S. Imanbaev, Differential Equations 48:6, 896–900 (2012).
[22] A.S. Makin, Differential Equations 42(4), 560–562 (2006).
[23] A.A. Shkalikov, Vestnik MGU. Mathematics and Mechanics 6, 12–21 (1982).
[24] N.S. Imanbaev and M.A. Sadybekov, AIP Conference Proceedings 1611 (American Institute of Physics, Melville, NY, 2014), 261–265.
[25] L.V. Kritskov and A.M. Sarsenbi, Differential Equations 51:8, 984–990 (2015).
[26] O.Sh. Mukhtarov and K. Aydemir, Acta Mathematica Scienta 35B:3, 639–649 (2015).
[27] K. Aydemir, Boundary value problems 2014:131 (2014).
[28] K. Aydemir and O.S. Mukhtarov, Z. Naturforsch. 70:5, 301–308 (2015).
[29] M. Kandemir, O.Sh. Mukhtarov, Kuwait Journal of Science and Engineering 36:2A, 79–98 (2009).
[30] O.Sh. Mukhtarov and K. Aydemir, Acta Mathematica Scientia 35B:3, 639–649 (2015).
[31] N.S. Imanbaev, Electron. J. Diff. Equ. 2016:87, 1–8 (2016).
[32] N.S. Imanbaev, B.E. Kanguzhin and B.T. Kalimbetov, Advances in Difference Equations 2013 (2013).

Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2016 (2016), No. 87, pp. 1–8.
ISSN: 1072-6691. URL: http://ejde.math.txstate.edu or http://ejde.math.unt.edu
ftp ejde.math.txstate.edu

STABILITY OF THE BASIS PROPERTY OF EIGENVALUE SYSTEMS OF STURM-LIOUVILLE OPERATORS WITH INTEGRAL BOUNDARY CONDITION

NURLAN S. IMANBAEV

ABSTRACT. We study a question on stability and instability of the basis property of a system of eigenfunctions of the Sturm - Liouville operator, with an integral perturbation of anti-periodic type on the boundary conditions.

1. INTRODUCTION

Spectral theory of non-self-adjoint boundary value problems for ordinary differential equations on a finite interval goes back to the classical works of Birkhoff [3] and Tamarkin [29]. They introduced the concept of regular boundary conditions and investigated asymptotic behavior of eigenvalues and eigenfunctions of such problems. In their works Malamud and Oridoroga [18, 19] proved completeness of eigenfunctions and associated functions for a wide class of boundary value problems which includes regular boundary conditions. In space $L^2(0,1)$ we consider an operator L_0, generated by the following ordinary differential expression:

$$L_0(u) \equiv -u''(x) + q(x)u(x), \quad q(x) \in C[0,1],\ 0 < x < 1 \tag{1.1}$$

and the boundary value conditions of the form

$$U_j(u) = a_{j1}u'(0) + a_{j2}u'(1) + a_{j3}u(0) + a_{j4}u(1) = 0, \quad j = 1,2. \tag{1.2}$$

When the boundary conditions (1.2) are strongly regular, the results by Dunford [6, 7], Mikhailov [20] and Kesel'man [15] provide the Riesz basis property in $L^2(0,1)$ of the eigenfunctions and associated functions (E and AF) system of the problem. In the case when the boundary conditions are regular but not strongly regular, the question on basis property of E and AF system is not yet completely resolved. We introduce the matrix of coefficients of the boundary conditions (1.2):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}.$$

By $A(ij)$ we denote the matrix composed of the i-th and j-th columns of the matrix A, $A_{ij} = \det A(ij)$. Let the boundary conditions (1.2) be regular but not

2010 *Mathematics Subject Classification.* 34L20, 34L40.
Key words and phrases. Sturm-Liouville operator basis property; eigenfunction; eigenvalue; non self-adjoint problem; anti-periodic boundary condition; perturbation; stability.

Submitted August 27, 2015. Published March 30, 2016.

strongly regular. According to [26, p. 73], if the following conditions hold:

$$A_{12} = 0, \quad A_{14} + A_{23} \neq 0, \quad A_{14} + A_{23} = \mp(A_{13} + A_{24}), \tag{1.3}$$

then the boundary conditions (1.2) are regular, but not strongly regular boundary conditions.

Makin [21] suggested dividing all regular, but not strongly regular, boundary conditions into four types:

I $A_{14} = A_{23}$, $A_{34} = 0$;
II $A_{14} = A_{23}$, $A_{34} \neq 0$;
III $A_{14} \neq A_{23}$, $A_{34} = 0$;
IV $A_{14} \neq A_{23}$, $A_{34} \neq 0$.

For example, periodical or antiperiodical boundary conditions form the type I, and can be determined in the following form:

$$A_{14} = A_{23}, \quad A_{34} = 0,$$

That is, $a_{11} = -a_{12}, a_{13} = a_{14} = a_{21} = a_{22} = 0$ and $a_{23} = -a_{24}$.

These conditions will be equivalent to matrix A, where the following two options are possible:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

are periodical or

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

are antiperiodical, and the same boundary conditions with "the lowest coefficients" form the type II. The boundary value conditions defined as $A_{14} \neq A_{23}$, $A_{34} = 0$ form the type III. These conditions are always equivalent to boundary conditions given by the matrix A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

This case will be the aim of our research in this paper. Moreover, Makin [21] allocated the one type of non-strongly regular boundary value conditions, when E and AF systems of the spectral problem

$$L_0(u) \equiv -u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x), \quad q(x) \in C[0,1], \ 0 < x < 1, \tag{1.4}$$

with boundary conditions of the form (1.2) forms Riesz basis for any potentials $q(x)$. When $q(x) \equiv 0$, the problem about basis property of E and AF system of the problem with general regular boundary conditions has been completely resolved in [17]. In [4, 5] questions on convergence of eigenfunctions expansion of the Dirac operator in vector - matrix form and the Hill operator, forming Riesz basis in $L^2(0,1)$, with regular, but not strongly regular, boundary value conditions have been considered. For Dirac operators Mityagin [23] proved that periodic (or anti-periodic) boundary conditions give a rise to a Riesz system of 2D projections.

2. Statement of the problem

The spectral problem (1.4)-(1.2) with boundary conditions of the type I when $q(x) \equiv 0$ is self-adjoint; the system of its eigenfunctions is the usual trigonometric system, forming an orthonormal basis in $L^2(0,1)$. For the case of non-self-adjoint initial operator the question about preservation of the basis properties with some

(weak in a certain sense) perturbation was shown in the type of several examples in [8].

Riesz basis property of eigenfunctions and associated functions of periodic and antiperiodic Sturm-Liouville problems was considered in [30]. In [12, 27] questions on stability of basis properties of the periodic problem for (1.4) were investigated with integral perturbation of the boundary conditions (1.2), when $j = 2$, of the type I; that is, $A_{14} = A_{23}$, $A_{34} = 0$. Moreover, in [22] similar issues at $q(x) \equiv 0$ have been studied. In the present paper we consider a spectral problem close to research of [22] when $q(x) \equiv 0$, with integral perturbation of the boundary conditions (1.2) when $j = 2$, which belong to type I:

$$L_1(u) \equiv -u''(x) = \lambda u(x), \quad 0 < x < 1, \tag{2.1}$$

$$U_1(u) \equiv u(0) + u(1) = \int_0^1 \overline{p(x)} u(x) dx, \quad p(x) \in L^1(0,1), \tag{2.2}$$

$$U_2(u) \equiv u'(0) + u'(1) = 0. \tag{2.3}$$

From [28] it follows that the E and AF system of the problem (2.1)-(2.3) is complete and minimal in $L^2(0,1)$. Moreover, the E and AF system for any $p(x)$ forms Riesz basis with brackets. Our aim is to show that the basis property in $L^2(0,1)$ of the E and AF system of problem (2.1)-(2.3) is unstable with respect to small changes of kernel $p(x)$ of integral perturbation. In [13] the method of constructing the characteristic determinant of the spectral problem with integral perturbation of the boundary conditions has been suggested.

The basis properties in $L^p(-1,1)$ of root functions of the nonlocal problem for the equations with involution have been studied in [16]. Instability of basis properties of root functions of the Schrodinger operator with nonlocal perturbation of the boundary condition has been investigated in [10]. In [9] they studied the question of stability and instability of basis property of system of eigenfunctions and associated functions of the double differentiation operator with an integral perturbation of Samarskii - Ionkin type boundary conditions. In [24] they considered the eigenfunction expansion for Sturm-Liouville problems with transmission conditions at one interior point. Boundary value problems with transmission conditions were investigated extensively in the recent years (see, for example, [1, 2, 14, 25]).

3. Characteristic determinant of a spectral problem

In this section we use the method in [13] to construct the characteristic determinant of the problem with integral perturbation of the boundary condition. Applying integration by parts, for smooth enough complex-valued functions $u(x)$ and $v(x)$ we obtain the Lagrange formula:

$$\begin{aligned} &\int_0^1 L_0(u)\overline{v(x)}\,dx - \int_0^1 u(x)\overline{L_0^*(v)}dx \\ &= [u'(0) + u'(1)]\overline{v(0)} + u'(1)[\overline{v(0)} + \overline{v(1)}] \\ &\quad - [u(0) + u(1)]\overline{v'(0)} - u(1)[\overline{v'(0)} + \overline{v'(1)}]. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Here $L_0^*(v)$ is the adjoint differential expression

$$L_0^* v = -v''(x) + \overline{q(x)} v(x), \quad 0 < x < 1. \tag{3.2}$$

Consequently the operator L_0^* corresponding to the operator L_0 is given by differential expression (3.2) and the boundary conditions

$$V_1(v) = v(0) + v(1) = 0, \quad V_2(v) = v'(0) + v'(1) = 0. \tag{3.3}$$

Also the operator L_1^* corresponding to the operator L_1 is given by the loaded differential expression

$$L_1^*(v) = -v''(x) + \overline{q(x)}v(x) + p(x)v'(0), \quad 0 < x < 1, \tag{3.4}$$

and antiperiodic boundary conditions (3.3). One of the aspects of this problem is the fact that the adjoint problem to (2.1)-(2.3) is the spectral problem for the loaded differential equation

$$\begin{gathered} L_1^*(v) = -v''(x) + p(x)v'(0) = \bar{\lambda}v(x), \\ V_1(v) = v(0) + v(1) = 0, \\ V_2(v) = v'(0) + v'(1) = 0. \end{gathered} \tag{3.5}$$

First, we construct the characteristic determinant of the spectral problem (2.1)-(2.3). Presenting the general solution of the equation (2.1) by the formula

$$u(x, \lambda) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x,$$

and with respect to the boundary conditions (2.2)-(2.3), we obtain the following linear system for the coefficients C_k:

$$\begin{gathered} C_1\Big[1 + \cos\sqrt{\lambda} - \int_0^1 \overline{p(x)}\cos\sqrt{\lambda}x\,dx\Big] + C_2\Big[\sin\sqrt{\lambda} - \int_0^1 \overline{p(x)}\sin\sqrt{\lambda}x\,dx\Big] = 0, \\ C_1\Big[-\sin\sqrt{\lambda}\Big] + C_2\Big[1 + \cos\sqrt{\lambda}\Big] = 0. \end{gathered}$$

Its determinant will be the characteristic determinant of the spectral problem (2.1)-(2.3):

$$\Delta_1(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 + \cos\sqrt{\lambda} - \int_0^1 \overline{p(x)}\cos\sqrt{\lambda}x\,dx & \sin\sqrt{\lambda} - \int_0^1 \overline{p(x)}\sin\sqrt{\lambda}x\,dx \\ -\sin\sqrt{\lambda} & 1 + \cos\sqrt{\lambda} \end{vmatrix}. \tag{3.6}$$

When $p(x) = 0$ we obtain the characteristic determinant of the unperturbed problem (2.1)-(2.3). It is de denote by $\Delta_0(\lambda) = 2(1 + \cos\sqrt{\lambda})$. The number $\lambda_k^0 = ((2k-1)\pi)^2$ is the eigenvalue of the unperturbed antiperiodic problem, and $u_{k0}^0 = \sqrt{2}\cos((2k-1)\pi x)$, $u_{k1}^0 = \sqrt{2}\sin((2k-1)\pi x)$ are eigenfunctions. We represent the function $p(x)$ in the Fourier series form by the trigonometric system

$$p(x) = \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos((2k-1)\pi x) + b_k \sin((2k-1)\pi x)]. \tag{3.7}$$

Using (3.7), we find more convenient representation for the determinant $\Delta_1(\lambda)$. To do this, first, we calculate integrals in (3.6). Simple calculations show that

$$\begin{gathered} \int_0^1 \overline{p(x)}\cos(\sqrt{\lambda}x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[\bar{a}_k\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} + \bar{b}_k((2k-1)\pi)(\cos\sqrt{\lambda} + 1)]}{\lambda - ((2k-1)\pi)^2}, \\ \int_0^1 \overline{p(x)}\sin(\sqrt{\lambda}x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[\bar{a}_k\sqrt{\lambda}(1 + \cos\sqrt{\lambda}) + \bar{b}_k((2k-1)\pi)\sin\sqrt{\lambda}]}{\lambda - ((2k-1)\pi)^2}. \end{gathered}$$

Using these results and standard transformations, the determinant (3.6) is reduced to the form

$$\Delta_1(\lambda) = \Delta_0(\lambda) \cdot A(\lambda),$$

where

$$A(\lambda) = \Big[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{b}_k \frac{(2k-1)\pi}{\lambda - ((2k-1)\pi)^2}\Big]. \tag{3.8}$$

Hence, the following theorem is proved.

Theorem 3.1. *The characteristic determinant of the spectral problem* (2.1)-(2.3) *with the perturbed boundary value conditions can be represented in the form* (3.8), *where* $\Delta_0(\lambda)$ *is the characteristic determinant of the unperturbed antiperiodic spectral problem,* b_k *are coefficients of the expansion* (3.7) *of the function* $p(x)$ *into trigonometric Fourier series.*

The function $A(\lambda)$ in (3.8) has a first-order pole at the points $\lambda = \lambda_k^0$, and the function $\Delta_0(\lambda)$ has a second order zero at these points. Therefore, the function $\Delta_1(\lambda)$, represented by the formula (3.8), is an entire analytic function of the variable λ. The characteristic determinant, which is an entire analytical function, related with the problem on eigenvalues of differential operator of the third order with nonlocal boundary conditions has been studied in [11].

4. Particular cases of the characteristic determinant

The characteristic determinant (3.8) looks simpler when

$$p(x) = \sum_{k=1}^{N} \big[a_k \cos((2k-1)\pi x) + b_k \sin((2k-1)\pi x)\big].$$

That is, there exists such a number N such that $a_k = b_k = 0$ for all $k > N$. In this case, formula (3.8) takes the form

$$\Delta_1(\lambda) = \Delta_0(\lambda)\Big[1 + \sum_{k=1}^{N} \bar{b}_k \frac{(2k-1)\pi}{\lambda - ((2k-1)\pi)^2}\Big]. \tag{4.1}$$

From this particular case of formula (3.8), the we have the following corollary.

Corollary 4.1. *For any preassigned numbers - a complex* $\hat{\lambda}$ *and a positive integer* $\hat{m}$ *there always exists a function* $p(x)$ *such that* $\hat{\lambda}$ *will be an eigenvalue of the problem* (2.1)-(2.3) *of multiplicity* $\hat{m}$.

From the analysis of formula (4.1) it is easy to see that $\Delta_1(\lambda_k^0) = 0$ for all $k > N$. That is, all eigenvalues λ_k^0, $k > N$, of the unperturbed periodic problem are the eigenvalues of the perturbed spectral problem (2.1)-(2.3). It is also not difficult to show that the multiplicity of the eigenvalues λ_k^0, $k > N$ is also preserved. Moreover, from the condition of orthogonality of the trigonometric system it follows that in this case:

$$\int_0^1 \overline{p(x)} u_{kj}^0(x) dx = 0, \quad j = \overline{0,1},\ k > N.$$

Thus, the eigenfunctions $u_{kj}^0(x)$ of the antiperiodic problem when $k > N$ satisfy the boundary value conditions (2.2)-(2.3) and, therefore, they are eigenfunctions of the perturbed problem (2.1)-(2.3). Hence, in this case the system of eigenfunctions of (2.1)-(2.3) and the system of eigenfunctions of the periodic problem (an

orthonormal basis) differ from each other only in a finite number of the first members. Consequently, the system of eigenfunctions of (2.1)-(2.3) also forms a Riesz basis in $L^2(0,1)$. The set of functions $p(x)$, that can be represented as a finite series (3.7), is dense in $L^1(0,1)$. Thus, we have proved the following result.

Theorem 4.2. *Let $A_{14} = A_{23}$, $A_{34} = 0$; that is, the boundary conditions* (2.2)-(2.3) *belong to type I with integral perturbation. Then the set of functions $p(x) \in L^1(0,1)$, such that the system of eigenfunctions of the perturbed problem* (2.1)-(2.3) *forms Riesz basis in $L^2(0,1)$, is dense in $L^1(0,1)$.*

5. Instability of the basis property

Now we show that basis properties of eigenfunctions system of the perturbed problem (2.1)-(2.3) is unstable for an arbitrarily small integral perturbation of the boundary-value condition (2.2).

Theorem 5.1. *Suppose that $A_{14} = A_{23}$, $A_{34} = 0$; that is, the boundary-value conditions* (2.2)-(2.3) *belong to type I. Then the set of functions $p(x) \in L^1(0,1)$, such that the system of eigenfunctions of the perturbed problem* (2.1)-(2.3) *does not form even a normal basis in $L^2(0,1)$, is dense in $L^1(0,1)$.*

Proof. Let in (3.7) the coefficients $b_k \neq 0$ for all sufficiently large k. Then from (3.8) we note that $\lambda = \lambda_k^0$ is a simple eigenvalue of problem (2.1)-(2.3). By direct calculation we get that $u_k^1 = b_k \cos((2k-1)\pi)x - a_k \sin((2k-1)\pi)x$ are eigenfunctions of (2.1)-(2.3), corresponding to $\lambda_k^0 = ((2k-1)\pi)^2$. Moreover, the eigenfunction of the dual problem (3.5), corresponding to the eigenvalue λ_k^0, is $v_k^1(x) = c_k \cos((2k-1)\pi)x$.

Since the eigenfunctions of the dual problems form biorthogonal system, then we have the equality of the scalar product $(u_k^1, v_k^1) = 1$. Hence, it is easy to obtain $b_k \bar{c}_k = 2$. Therefore,

$$\|u_k^1\| \cdot \|v_k^1\| = \sqrt{1 + |\frac{a_k}{b_k}|^2}. \tag{5.1}$$

Denote by $\sigma_N(x)$ partial sum of the Fourier series (3.7). It is obvious, that the set of functions, which can be represented as the infinite series

$$\bar{p}(x) = \sigma_N(x) + \sum_{k=N+1}^{\infty} [\bar{a}_k \cos((2k-1)\pi x) + \bar{b}_k \sin((2k-1)\pi x)],$$

where $\bar{a}_k = 2^{-k}$, $\bar{b}_k = 2^{-k}/k$, $k > N$, is dense in $L^1(0,1)$. However, from (5.1) it follows that for such kind of functions $\bar{p}(x)$ for the corresponding eigenfunctions systems of the direct and conjugate problems there holds: $\lim_{k\to\infty} \|u_k^1\|\|v_k^1\| = \infty$.

That is, the condition of uniform minimal property (see [8] and references in it) of the system does not hold, and therefore, it does not form even a basis in $L^2(0,1)$. □

Since adjoint operators possess the Riesz basis property of the root functions, we obtain the corollary.

Corollary 5.2. *Suppose that $A_{14} = A_{23}$, $A_{34} = 0$, that is boundary value conditions* (2.2)-(2.3) *belongs to type I. Then the set P of functions $p(x) \in L^1(0,1)$, such that the system of eigenfunctions of* (3.5) *for the loaded differential equations forms Riesz basis in $L^2(0,1)$, is everywhere dense in $L^1(0,1)$. The set $L^1(0,1)\backslash P$ is also everywhere dense in $L^1(0,1)$.*

The results of this paper, in contrast to [28], demonstrate instability of basis properties of the root functions of the problem with an integral perturbation of the boundary value conditions of type I, which are regular, but not strongly regular.

Acknowledgements. This research was financially supported by a grant from the Ministry of Science and Education of the Republic of Kazakhstan (Grant No. 0825/GF4).

References

[1] K. Aydemir; *Boundary value problems with eigenvalue depending boundary and transmission conditions.* Boundary value problems, 2014(131) (2014).

[2] K. Aydemir, O. S. Mukhtarov; *Spectrum and Green's Function of a Many-Interval Sturm-Liouville Problem.* Z. Naturforsch., 70(5) (2015), pp. 301-308.

[3] G. D. Birkhoff; *Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations.* Trans. Amer. Math. Soc., 9 (1908), pp. 373-395.

[4] P. Djakov, B. Mityagin; *Unconditional Convergence of Spectral Decompositions of 1D Dirac Operators with Regular Boundary Conditions.* Indiana University. Math. Jornal, 61 (2012), pp. 359-398.

[5] P. Djakov, B. Mityagin; *onvergence of spectral decompositions of Hill operators with trigonometric polynomial potentials*, Math. Ann., 351 (2011), pp. 509-540.

[6] N. Dunford; *A survoy of the theory of spectral operators.* Bull. Amer. Math. Soc., 64 (1958), pp. 217-274.

[7] N. Dunford, J. Schwartz; *Linear Operators. Part III, Spectral Operators.* Wiley, New-York, 1971.

[8] V. A. Il'in, L. V. Kritskov; *Properties of spectral expansions corresponding to non-self-adjoint differential operators.* Journal of Mathematical Sciences, 116(5) (2003), pp. 3489-3550.

[9] N. S. Imanbaev; *On stability of basis property of root vectors system of the Sturm-Liouville operator with an integral perturbation of conditions in nonstrongly regular Samarskii-Ionkin type problems.* International Journal of Differential Equations, (2015), Article ID 641481, 6 pages.

[10] N. S. Imanbaev, B. T. Kalimbetov, A. M. Sarsenbi; *Study basicity of root functions of the Schrodinger operator with a non-local perturbation.* International Journal of Pure and Applied Mathematics, 89(3) (2013), pp. 433-438.

[11] N. S. Imanbaev, B. E. Kanguzhin, B. T. Kalimbetov; *On zeros the characteristic determinant of the spectral problem for a third-order differential operator on a segment with nonlocal boundary conditions.* Advances in Difference Equations, 2013 (2013), doi: 10.1186/1687-1847-2013-110.

[12] N. S. Imanbaev, M. A. Sadybekov; *On spectral properties of a periodic problem with an integral perturbation of the boundary condition.* Eurasian Mathematical Journal, 4(3) (2013), pp. 53-62.

[13] N. S. Imanbaev, M.A. Sadybekov; *Characteristic determinant of the spectral problem for the ordinary differential operator with the boundary load.* AIP Conference Proceedings, International conference on analysis and applied mathematics (ICAAM 2014), 1611 (2014), pp.261-265.

[14] M. Kandemir, O.Sh. Mukhtarov; *A method on solving irregular boundary value problems with transmission conditions.* Kuwait Journal of Science and Engineering 36(2A) (2009), pp. 79-98.

[15] G. M. Kesel'man; *About unconditional convergence of expansion by eigenfunctions of some differential operators.* Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Math., (2) (1964), pp. 82-93. (in Russian).

[16] L. V. Kritskov, A.M. Sarsenbi; *Spectral properties of a nonlocal problem for the differential equation with involution.* Differential Equations, 51(8) (2015), pp. 984-990.

[17] P. Lang, J. Locker; *Spectral Theory of Two-Point Differential Operators Determined by $-D^2$.* J. Math. Anal. And Appl., 146(1) (1990), pp. 148-191.

[18] M. M. Malamud, L. L. Oridoroga; *Theorems of the Completeness for the system of Ordinary Differential Equations.* Functional Analysis and Applications, 34(3) (2000), pp.88-90.

[19] M. M. Malamud, L. L. Oridoroga; *On the completeness of root vectors of first order systems.* Doklady Mathematics, 82(3) (2010), pp. 809-905.

[20] V. P. Mikhailov, *On Riesz basis in $L_2(0,1)$*. Doklady Mathematics, 144(5) (1962), pp. 981-984. (in Russian).
[21] A.S. Makin; *On spectral expansions, responsible to non self-adjoint Sturm-Liouville operator*. Doklady Mathematics, 406(1) (2006), pp. 21-24.
[22] A. S. Makin; *About non-local perturbation of periodic problem on eigenvalues*. Differential Equations, 42(4) (2006), pp. 560-562.
[23] B. Mityagin; *Spectral expansions ono-dimensional periodic Dirac operators*. Dyn. Partial Differ. Equ., 1 (2004), pp. 125-191.
[24] O. Sh. Mukhtarov, K. Aydemir; *Eigenfunction expansion for Sturm-Liouville Problems with transmission conditions at one interior point*. Acta Mathematica Scienta, 35B(3) (2015), pp. 639-649.
[25] O. Sh. Mukhtarov and K. Aydemir; *Eigenfunction expansion for Sturm-Liouville problems with transmission conditions at one interior point*. Acta Mathematica Scientia, 35B(3) (2015), pp. 639-649.
[26] M. A. Naimark; *Linear Differential Operators*. Ungar, New York, 1967.
[27] M. A. Sadybekov, N. S. Imanbaev; *On the basis property of root functions of a periodic problem with an integral perturbation of the boundary condition*. Differential Equations, 48(6) (2012), pp. 896-900.
[28] A. A. Shkalikov; *On basis property of eigenfunctions of ordinary differential operators with integral boundary value conditions*. Vestnik MGU. Mathematics and Mechanics, (6) (1982), pp.12-21.
[29] I. D. Tamarkin; *Sur qudques points de In theorie des equations differentiales ordinares of sur generalization de In serie de Fourier*. Rend. Cire. Math. Palermo, 34(2) (1912), pp. 345-382.
[30] O. A. Veliev, A. A. Shkalikov; *On the Riesz basis property of eigen and associated functions of periodic and anti-periodic Sturm-Liouville problems*. Math. Zametki, 85(5) (2009), pp. 671-686.

Nurlan S. Imanbaev
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, 050010 125 Pushkin str., Almaty, Kazakhstan.
Estabushment "Kazakhstan Engineering and Pedagogical University of Friendship of Nations" , 060017, Shymkent, Kazakhstan
E-mail address: imanbaevnur@mail.ru

ЕУРАЗИЯ ҰЛТТЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

TWMS

TWMS 2017

VI CONGRESS OF THE TURKIC WORLD MATHEMATICAL SOCIETY

October 2–5, 2017 Astana – Kazakhstan

TURKIC WORLD MATHEMATICAL SOCIETY
MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE
OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
L.N. GUMILYOV EURASIAN NATIONAL UNIVERSITY

ТҮРКІТІЛДЕС ЕЛДЕР МАТЕМАТИКАЛЫҚ ҚОҒАМЫ VI КОНГРЕСІНІҢ ТЕЗИСТЕР ЖИНАҒЫ

ABSTRACTS OF VI CONGRESS OF THE TURKIC WORLD MATHEMATICAL SOCIETY

СБОРНИК ТЕЗИСОВ VI КОНГРЕССА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА ТЮРКОЯЗЫЧНЫХ СТРАН

Stability of basis property of a type of problems with nonlocal perturbation of boundary conditions *

Nurlan Imanbaev

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, 125 Pushkin st., Almaty 050010 Kazakhstan
E-mail: imanbaevnur@mail.ru

It is well known that a system of eigenfunctions of the operator, given by a formally self-adjoint differential expression with arbitrary self-adjoint boundary conditions providing a discrete spectrum, form an orthonormal basis of the space L_2.

The problem of preserving the basis properties with a (weak, in a sense) perturbation of the initial operator was investigated in many works. The present talk is devoted to the basis property of the root functions of the differential operator with integral boundary conditions

$$Lu \equiv -u''(x) = \lambda u(x), \ 0 < x < 1. \tag{42}$$

$$U_1(u) \equiv u'(0) - u'(1) + \alpha u(0) = \int_0^1 \overline{p(x)} u(x) dx, \tag{43}$$

$$U_2(u) \equiv u(0) - u(1) = 0. \tag{44}$$

Here $\alpha \neq 0$ is an arbitrary complex number, $p(x) \in L_2(0,1)$.

Funding: The authors were supported by the grant no. 0825/GF4 of the Ministry of Education and Science of Republic of Kazakhstan.

Keywords: fractional differentiation operator,normalized systems,exact solutions, constructing solutions, special functions

2010 Mathematics Subject Classification: 26A33, 34A08, 33E12, 35K90

References

[1] N.S. Imanbaev, M.A. Sadybekov, *On spectral properties of a periodic problem with an integral perturbation of the boundary condition.* Eurasian Mathematical Journal, 4(2013), no. 3., 53–62.

ISSN 1682–0525

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 18 № 2 (68) 2018

Институт математики и математического моделирования
Алматы

ISSN 1682–0525
Математический журнал
2018. — Том 18, № 2. — С. 124–132.

МРНТИ 27.31.17

ON ZEROS OF A QUASI-POLYNOMIAL OF EXPONENTIAL TYPE CONNECTED WITH A REGULAR THIRD ORDER DIFFERENTIAL OPERATOR

N.S. Imanbaev

Annotation. In this paper we consider the spectral problem for a third-order differential operator with regular boundary conditions of periodic type. Adjoint operator and characteristic determinant of the spectral problem are constructed. The characteristic determinant will be an entire analytic function in the quasipolynomial form of exponential type. Zeros of the entire function that are adequately eigenvalues of the original operator are found.

Keywords. Spectral problem, third order differential operator, regular boundary value conditions, zeros of an entire function, quasi-polinomial.

1 Introduction

In the space $L_2(0,1)$ we consider an operator L_0, generated by the ordinary differential equation

$$l(u) = u'''(x) + P_1(x)\,u''(x) + P_2(x)\,u'(x) + P_3(x)\,u(x) \tag{1}$$

and the boundary conditions

$$U_1(u) \equiv u(0) = 0,\ U_2(u) \equiv u(1) = 0,\ U_3(u) \equiv u'(0) - u'(1) = 0. \tag{2}$$

Let L_0 be an operator in $L_2(0,1)$, given by the expression (1) and the boundary conditions (2), where $U_1(u)$, $U_2(u)$, $U_3(u)$ are linear forms, that are regular by G.D. Birkhoff [1], [2]. The important result, established by Birkhoff, consisted in estimating the resolvent of a regular differential operator

2010 Mathematics Subject Classification: 34B05, 34B09, 34B10, 34L05, 34L10.
Funding: The paper was supported by the state grant "The Best Teacher of the University-2017" of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan.

and in establishing the asymptotic behavior of spectrum. In the monograph of M.A. Naimark ([3], p. 67), a subclass of regular boundary conditions, so-called strongly regular boundary conditions, is distinguished, where it is noted that for an odd-order equation all regular conditions are strongly regular. Therefore, according to [3], the boundary conditions (2) are strongly regular boundary conditions.

2 Adjoint problem

We consider a case when $P_1(x) = P_2(x) = P_3(x) = 0$, that is

$$L_0 u \equiv l(u) = u'''(x). \tag{3}$$

Using integration by parts, we obtain the Lagrange formula:

$$\int_0^1 l(u)\overline{v(x)}dx + \int_0^1 u(x)\overline{l^*(v)}dx = u''(1)\overline{v(1)} - u''(0)\overline{v(0)} -$$

$$-\left[\overline{v'(0)} - \overline{v'(1)}\right] \cdot u'(0) + u(1)\overline{v''(1)} - u(0)\overline{v''(0)}.$$

Here $l^*(v)$ is the adjoint differential expression:

$$l^*(v) = -v'''(x),\ 0 < x < 1. \tag{4}$$

Consequently, the operator L_0^* which is adjoint to the operator L_0, is given by the differential expression (4) and boundary conditions

$$V_1(v) \equiv v(1) = 0,\ V_2(v) \equiv v(0) = 0,\ V_3(v) \equiv v'(0) - v'(1) = 0. \tag{5}$$

3 Statement of the problem and the main result

In this paper we consider a spectral problem close to the investigation [4]:

$$L_0 u \equiv l(u) = u'''(x) = -\lambda u(x),\ 0 < x < 1 \tag{6}$$

with the boundary conditions (2).

In [4] stability questions of basis properties of root vectors of a n-th order differential operator under integral perturbation of boundary condition are

investigated. And also in [5] these questions were studied for the Sturm-Liouville operator, with integral perturbation of one of boundary conditions of the antiperiodic type.

The adjoint problem has the following form:

$$L_0^* v \equiv l^*(v) = -v'''(x) = \overline{\lambda} v(x), \; 0 < x < 1 \tag{7}$$

with the boundary conditions (5).

In the case when $\lambda = 0$, representing the general solution of (6) in the form $u(x) = ax^2 + bx + c$, and satisfying the boundary conditions (2), we have $u(x) \equiv 0$. That is, $\lambda = 0$ is not eigenvalues of the operator L_0. Consequently, $\lambda = 0$ is a regular point and belongs to the resolvent set of the operator L_0, that is $0 \in \rho(L_0)$. Then there exists an inverse operator $(L_0 - \lambda E)^{-1}$, where E is a unit operator.

In the case $\lambda \neq 0$, general solution of the equation (6) can be represented by the formula

$$u(x) = \sum_{j=1}^{3} C_j e^{k_j \sqrt[3]{\lambda} x},$$

where $\left(k_j \sqrt[3]{\lambda}\right)^3 = \lambda$.

Hence, it follows, that $k_j^3 = 1; j = \overline{1,3}$, i.e.

$$k_1 = 1, \; k_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \; k_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Satisfying the general solution of the equation (6) by the boundary conditions (2), we obtain a linear system with respect to the coefficients C_j:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 0, \\ C_1 e^{k_1 \sqrt[3]{\lambda}} + C_2 e^{k_2 \sqrt[3]{\lambda}} + C_3 e^{k_3 \sqrt[3]{\lambda}} = 0, \\ C_1 k_1 \sqrt[3]{\lambda}\left(1 - e^{k_1 \sqrt[3]{\lambda}}\right) + C_2 k_2 \sqrt[3]{\lambda}\left(1 - e^{k_2 \sqrt[3]{\lambda}}\right) + C_3 k_3 \sqrt[3]{\lambda}\left(1 - e^{k_3 \sqrt[3]{\lambda}}\right) = 0. \end{cases}$$

Its determinant will be the characteristic determinant of the problem (6), (2):

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e^{k_1 \sqrt[3]{\lambda}} & e^{k_2 \sqrt[3]{\lambda}} & e^{k_3 \sqrt[3]{\lambda}} \\ k_1 \sqrt[3]{\lambda}\left(1 - e^{k_1 \sqrt[3]{\lambda}}\right) & k_2 \sqrt[3]{\lambda}\left(1 - e^{k_2 \sqrt[3]{\lambda}}\right) & k_3 \sqrt[3]{\lambda}\left(1 - e^{k_3 \sqrt[3]{\lambda}}\right) \end{vmatrix}.$$

Whence by standard computations and transformations the characteristic determinant of the problem (6), (2) reduces to the form:

$$\Delta(\lambda) = \sqrt[3]{\lambda}\Big((k_2 - k_3)\, e^{k_1 \sqrt[3]{\lambda}} + (k_1 - k_2)\, e^{(k_2+k_1)\sqrt[3]{\lambda}} + \tag{8}$$

$$+ (k_3 - k_1)\, e^{k_2 \sqrt[3]{\lambda}} + (k_3 - k_1)\, e^{(k_3+k_1)\sqrt[3]{\lambda}} +$$

$$+ (k_1 - k_2)\, e^{k_3 \sqrt[3]{\lambda}} + (k_2 - k_3)\, e^{(k_2+k_3)\sqrt[3]{\lambda}}\Big).$$

Let us formulate the obtained result in the form of a theorem.

THEOREM 1. *The characteristic determinant of the spectral problem (6), (2) can be represented in the form of the exponential quasipolynomial (8), where* $k_1 = 1$, $k_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $k_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, *and is an entire analytic function of the variable* λ.

The connection between zeros of quasipolynomials with spectral problems is reflected in [6]–[10]. The papers [3] and [11]–[13] are devoted to the investigation of zeros of entire functions, having an integral representation and coinciding with quasipolynomials.

Consider a problem of zeros distribution of the entire function

$$\Delta_1(\lambda) = \frac{\Delta(\lambda)}{\sqrt[3]{\lambda}}$$

on the complex plane λ. Thus, we consider the distribution of zeros of the quasipolynomial

$$\Delta_1(\lambda) = (k_2 - k_3)\, e^{k_1 \sqrt[3]{\lambda}} + (k_1 - k_2)\, e^{(k_2+k_1)\sqrt[3]{\lambda}} +$$

$$+ (k_3 - k_1)\, e^{k_2 \sqrt[3]{\lambda}} + (k_3 - k_1)\, e^{(k_3+k_1)\sqrt[3]{\lambda}} + (k_1 - k_2)\, e^{k_3 \sqrt[3]{\lambda}} +$$

$$+ (k_2 - k_3)\, e^{(k_2+k_3)\sqrt[3]{\lambda}} = 0. \tag{9}$$

Conjugate indicator diagram of the function $\Delta_1(\lambda)$ will be a right hexagon on the complex plane λ. Sides of the hexagon consist of the following segments:

$$\left(\overline{k_1}, \overline{k_3 + k_1}\right); \left(\overline{k_3}, \overline{k_3 + k_1}\right); \left(\overline{k_2 + k_3}, \overline{k_3}\right);$$

$$\left(\overline{k_2},\, \overline{k_2+k_3}\right);\ \left(\overline{k_2},\, \overline{k_2+k_1}\right);\ \left(\overline{k_2+k_1},\, \overline{k_1}\right),$$

where the bar denotes complex conjugation, and are commensurable numbers, that is, they satisfy the conditions: there exists d such that

$$k_1-(k_2+k_3)=S_1d,\ (k_2+k_1)-(k_2+k_3)=S_2d,\ k_2-(k_2+k_3)=S_3d,$$

$$(k_3+k_1)-(k_2+k_3)=S_4d,\ k_3-(k_2+k_3)=S_5d,$$

S_j are some natural numbers.

Along the ray, perpendicular to the segment that passes through the points $\left(\overline{k_1},\, \overline{k_3+k_1}\right)$, there lie zeros of the quasipolynomial $e^{k_1\sqrt[3]{\lambda}}+e^{(k_3+k_1)\sqrt[3]{\lambda}}$, which are the majorizing exponents from (9).

Rays, which are perpendicular to the indicator diagram, are called critical. According to the result of the monograph [7], the critical rays on the plane λ are exactly six, that is, $\arg\sqrt[3]{\lambda}=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{3}, n=0,1,2,4,5$.

Similarly, along the other rays, the corresponding exponential quasipolynomials in (9) will be majorized. We multiply both sides of the equation (9) by $e^{-(k_2+k_3)\sqrt[3]{\lambda}}$, according to the commensurability condition, $k_1-(k_2+k_3)=S_1d$, instead of $(k_2+k_1)-(k_2+k_3)$ we put $S_2d,...$, instead of $k_3-(k_2+k_3)$ we put S_5d. Then

$$(k_2-k_3)\,e^{S_1d\sqrt[3]{\lambda}}+(k_1-k_2)\,e^{S_2d\sqrt[3]{\lambda}}+(k_3-k_1)\,e^{S_3d\sqrt[3]{\lambda}}+$$

$$+(k_3-k_1)\,e^{S_4d\sqrt[3]{\lambda}}+(k_1-k_2)\,e^{S_5d\sqrt[3]{\lambda}}+(k_2-k_3)=0.$$

We denote $e^{d\sqrt[3]{\lambda}}$ by Z. Therefore:

$$i\sqrt{3}\cdot Z^{S_1}+\frac{1}{2}\left(3-i\sqrt{3}\right)Z^{S_2}-\frac{1}{2}\left(3+i\sqrt{3}\right)Z^{S_3}-$$

$$-\frac{1}{2}\left(3+i\sqrt{3}\right)Z^{S_4}+\frac{1}{2}\left(3-i\sqrt{3}\right)Z^{S_5}+i\sqrt{3}=0.$$

This is an algebraic equation, it has exactly as many solutions as the greatest degree of the equation. Denote this degree by $m=\max\left(S_1,S_2,S_3,S_4,S_5\right)$. Let $Z_1,Z_2,...,Z_m$ be a solution of the algebraic equation. Now we find $\sqrt[3]{\lambda}$ from the equation:

$$e^{d\sqrt[3]{\lambda}}=z_j, j=\overline{(1;m)},$$

$$L_n e^{d\sqrt[3]{\lambda}} = L_n z_j d\sqrt[3]{\lambda} = L_n z_j = \ln|z_j| + i\left(Arg\left(z_j\right) + 2\pi k\right),$$

$$\sqrt[3]{\lambda}_{jk} = \frac{\ln|z_j| + i\left(Arg\left(z_j\right) + 2\pi k\right)}{d},\ k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;\ j = \overline{(1, m)},$$

$$\lambda_{jk} = \frac{\left(\ln|z_j| + i\left(Arg\left(z_j\right) + 2\pi k\right)\right)^3}{d^3},\ k = 0, \pm 1, \pm 2, ...;\ j = \overline{(1; m)}.$$

Thus, we have

PROPOSITION. *1. Here infinitely many eigenvalues of the operator L_0 exist.*
2. Distance between two neighboring eigenvalues of one series (j is a constant) is exactly equal to $\frac{2\pi}{|d|}$.
3. Eigenvalues of each series lie on the rays, perpendicular to the segment that contain the numbers

$$\left(\overline{k_1},\ \overline{k_3 + k_1}\right);\ \left(\overline{k_3}, \overline{k_3 + k_1}\right);\ \left(\overline{k_2 + k_3},\ \overline{k_3}\right);$$

$$\left(\overline{k_2}\ \overline{k_2 + k_3}\right);\ \left(\overline{k_2},\ \overline{k_2 + k_1}\right);\ \left(\overline{k_2 + k_1},\ \overline{k_1}\right).$$

In particular, we consider in detail each case of finding zeros of the entire function (8):

$$e^{k_1\sqrt[3]{\lambda}} + e^{(k_3+k_1)\sqrt[3]{\lambda}} = 0,$$

that is

$$i\sqrt{3}e^{\sqrt[3]{\lambda}} + \left(-\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)e^{\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{\lambda}} = 0,$$

$$\sqrt[3]{\lambda_k} = \frac{\ln\left|\frac{2\sqrt{3}\cdot i}{3+\sqrt{3}i}\right| + i\arg\left(\frac{2\sqrt{3}i}{3+\sqrt{3}i}\right)}{-\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)} + \frac{2\pi k i}{-\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)},$$

$$k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3, ...$$

They coincide with zeros $\left(-\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)e^{\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{\lambda}} + i\sqrt{3}e^{-\sqrt[3]{\lambda}}$. Other terms from (8) do not contribute to these rays.

Similarly,

$$i\sqrt{3}e^{\sqrt[3]{\lambda}} + \left(\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)e^{\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{\lambda}} = 0,$$

$$\sqrt[3]{\lambda_k} = \frac{\ln\left|\frac{2\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}i}\right| - iarg\left(\frac{2\sqrt{3}i}{3-\sqrt{3}i}\right)}{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{2k\pi i}{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}},$$

where $k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ...$, which adequately coincide with zeros $e^{k_3\sqrt[3]{\lambda}} + e^{(k_2+k_3)\sqrt[3]{\lambda}}$.

Quasipolynomials, coinciding along the imaginary axis:

$$\left(\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)e^{-\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{\lambda}} - \left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)e^{\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{\lambda}} = 0$$

and

$$-\left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)e^{\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{\lambda}} + \left(\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)e^{\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{\lambda}} = 0,$$

have the same zeros $\sqrt[3]{\lambda_k} = \ln\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + 2k\pi i$, $k = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ...$

In this case, representatives of the other series do not contribute. And $|d| = 1, j = (\overline{1,6})$.

REFERENCES

1 Birkhoff G.D. On the asymptotic chapacter of the solutions of certain linear differential equations containing a papameter // Transactions of the American Mathematical Society. – 1908. – V. 9, No. 2. – P. 219-231.

2 Birkhoff G.D. Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations // Transactios of the American Mathematical Society. – 1908. – V. 9, No. 4. – P. 373-395.

3 Naimark M.A. Linear Differential Operators. – M.: Science, 1969. – 496 p.

4 Sadybekov M.A., Imanbaev N.S. A Reqular Differential Operator with Perturbed Boundary Condition // Mathematical Notes. – 2017. – V. 101, No. 5. – P. 878-887.

5 Imanbaev N.S. Stability of the basis property of eigenvalue systems of Sturm-Liouville operators with integral boundary condition // Electron. J. Diff. Equ. – 2016. – V. 2016, No. 87. – P. 1-8.

6 Bellman R., Cook K. Differential-difference equations. – M., 1967. – 548 p.

7 Leont'ev A.F. Entire functions and series of exponentials. – M., 1983. – 176 p.

8 Hald O.H. Discontinuous Inverse Eigen Value Problems // Communications on Pure Applied Mathematics, 1984. – V. XXXVII. – P. 539-577.

9 Lidsky V.B., Sadovnichiy V.A. Regularized sums of roots of a class of entire functions // Functional Analysis. – 1967. – V. 1, No. 2. – P. 52-59.

10 Sedletskii A.M. A necessary condition for all the zeros of an entire function of exponential type to lie in a curvilinear half-plane // Sbornik: Mathematics, 1995. – V. 186, No. 9. – P. 1353-1362.

11 Shkalikov A.A. On basis property of eigenfunctions of ordinary differential operators with integral boundary value conditions // Vestnik MGU. Series Math. Mech. – 1982. – V. 6. – P. 12-21.

12 Imanbaev N.S., Kanguzhin B.E., Kalimbetov B.E. On zeros the characteristic determinant of the spectral problem for a third-order differential operator on a segment with nonlocal boundary conditions // Advances in Difference Equations. – 2013. – doi: 10.1186/1687-1847-20113-110.

13 Malamud M.M., Oridoroga L.L. On completeness of root vectors of first order systems // Doklady Mathematics. – 2010. – V. 82, No. 3. – P. 809-905.

Иманбаев Н.С. ҮШІНШІ РЕТТІ РЕГУЛЯРЛЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ОПЕРАТОРМЕН БАЙЛАНЫСҚАН ЭКСПОНЕНЦИАЛДЫ ТЕКТЕС КВАЗИПОЛИНОМНЫҢ НӨЛДЕРІ ТУРАЛЫ

Бұл жұмыста периодтық тектес регулярлы шеттік шарттармен берілген үшінші ретті дифференциалдық оператор үшін спектралдық есеп қарастырылады. Спектралдық есептің түйіндес операторы мен характеристикалық анықтауышы құрылған. Характеристикалық анықтауыш экспоненциалды тектес квазиполином түріндегі бүтін функция болады. Бүтін функцияның нөлдері табылып, олардың қарастырылып отырған үшінші ретті дифференциалдық оператордың меншікті мәндері болатындығы сипатталған.

Кілттік сөздер. Спектралдық есеп, үшінші ретті дифференциалдық оператор, күшейтілген регулярлы шеттік шарттар, бүтін функциялардың нөлдері, квазиполином.

Иманбаев Н.С. О НУЛЯХ КВАЗИПОЛИНОМА ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА, СВЯЗАННОГО С РЕГУЛЯРНЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ОПЕРАТОРОМ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

В работе рассматривается спектральная задача для дифференциального оператора третьего порядка с регулярными краевыми условиями периодического типа. Построен сопряженный оператор и характеристический определитель спектральной задачи. Характеристический определитель будет целой аналитической функцией в виде квазиполинома экспоненциального типа. Найдены нули целой функции, которые являются собственными значениями исходного оператора.

Ключевые слова. Спектральная задача, дифференциальный оператор третьего порядка, усиленно регулярные краевые условия, нули целых функций, квазиполином.

Imanbaev N.S.
South-Kazakhstan State Pedagogical University
160012, Shymkent, Kazakhstan, 13 Baitursynov str.
E-mail: imanbaevnur@mail.ru

Received 04.06.2018

ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ – XXIX

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Материалы Международной конференции,
посвященной 90-летию
Владимира Александровича Ильина
(2–6 мая 2018 г.)

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Воронежский государственный университет
Математический институт имени В. А. Стеклова РАН
Вычислительный центр имени А. А. Дородницына ФИЦ ИУ РАН

ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ – XXIX

СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Материалы Международной конференции,
посвященной 90-летию
Владимира Александровича Ильина

(2–6 мая 2018 г.)

МОСКВА – 2018

волновода могут быть различны. Задача является трехмерной и векторной, и, в общем случае, не сводится к скалярной. Интерес к этой задаче возник давно, и она является, по-существу, классической в электродинамике.

Строятся функции Грина двух канонических областей: полупространства и полубесконечного прямоугольного цилиндра. Выделяется особенность функций Грина, исследуется их зависимость от волнового числа и других параметров. Следует отметить, что особенность выделяется полностью в замкнутой области (включая границу), и эта особенность различна для разных областей. Предлагается практический алгоритм выделения особенности для следов функций Грина.

Задача сводится к решению векторного интегро-дифференциального уравнения на границе раздела двух областей Ω. Уравнение рассматривается как псевдодифференциальное в специальных пространствах Соболева H^s и $H^{s'}$ [1]. Доказывается теорема о фредгольмовости с нулевым индексом соответствующего оператора в пространствах $H^s \to H^{s'}$. Доказываются теоремы о единственности решения задачи излучения, об однозначной разрешимости уравнения на Ω и задачи излучения в целом. Устанавливаются результаты о гладкости решений при гладких правых частях уравнения, и о зависимости решений от параметров, необходимые для доказательства принципа предельного поглощения в задаче.

Литература

1. Ильинский А.С. Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах / А.С. Ильинский, Ю.Г. Смирнов. — М.: ИПРЖР, 1996. — 176 с.

РЕГУЛЯРНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ КРАЕВОГО УСЛОВИЯ

Н.С. Иманбаев (Шымкент, Казахстан, ЮКГПИ)
imanbaevnur@mail.ru

Ключевые слова: *дифференциальные операторы, регулярные краевые условия, базисность*

В докладе рассматривается оператор $\mathcal{L}_0$, порожденный линейным обыкновенным дифференциальным выражением n-го порядка на отрезке

$$l(u) = u^{(n)}(x) + q_2(x)u^{(n-2)}(x) + \cdots + q_n(x)u(x),\ 0 < x < 1, \qquad (1)$$

и регулярными краевыми условиями общего вида

$$U_j(u) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} \left[\alpha_{jk} u^{(k)}(0) + \beta_{jk} u^{(k)}(1)\right] = 0, \ j = \overline{1, n}.$$

Здесь $q_k(x) \in C^{n-k}[0, 1]$, а формы $U_j(u)$ – линейно независимые.

Пусть m – произвольное фиксированное натуральное число из интервала $[1, n]$. Через $\mathcal{L}_1$ обозначим оператор в $L_2(0, 1)$, заданный выражением (1) и «возмущенными» краевыми условиями:

$$U_j(u) = 0, \ j = \overline{1, n}, \ j \neq m,$$

$$U_m(u) = \int_0^1 \overline{p(x)} u(x) dx, \quad \text{где } p(x) \in L_2(0, 1).$$

В докладе в предположении, что невозмущенный оператор $\mathcal{L}_0$ обладает системой собственных и присоединенных функций (СиПФ), образующей безусловный базис в $L_2(0, 1)$, мы построим характеристический определитель спектральной задачи для оператора $\mathcal{L}_1$. На основании полученной формулы будут сделаны выводы об устойчивости или не устойчивости свойств безусловной базисности СиПФ задачи при интегральном возмущении краевого условия.

В [1] использование формулы характеристического определителя продемонстрировано на примере задачи Самарского-Нонкина с интегральным возмущением краевого условия.

Литература

1. Садыбеков М.А., Иманбаев Н.С. Регулярный дифференциальный оператор с возмущенным краевым условием / М.А. Садыбеков, Н.С. Иманбаев // Матем. заметки. – 2017. – Т. 101, вып. 5. – С. 768–778.

ПРЕДСТАВЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНТ В ВЕСОВЫХ ПОДПРОСТРАНСТВАХ $H(D)$[1]

К.П. Исаев, Р.С. Юлмухаметов (Уфа, ИМВЦ УФИЦ РАН)
orbit81@list.ru, yulmukhametov@mail.ru

Ключевые слова: *система экспонент, весовые пространства аналитических функций*

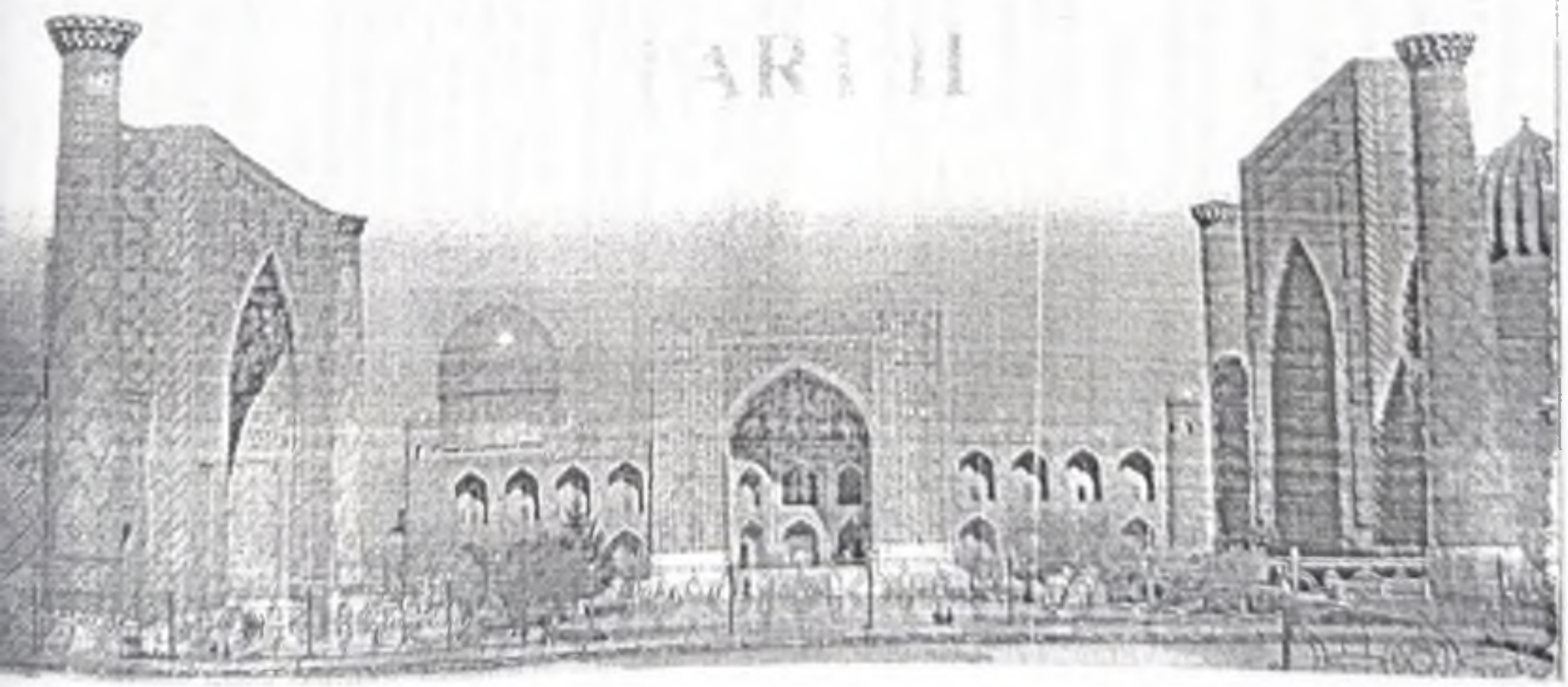
Пусть $D \subset \mathbb{C}$ – ограниченная выпуклая область и $\varphi(z)$ – выпуклая функция на D, стремящаяся к $+\infty$ вблизи границы

$$H(D, \varphi) = \{f \in H(D) : \sup_{z \in D} |f(z)| e^{-\varphi(z)} < \infty\}$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00095 А).

September 17-20, 2018,
Samarkand, Uzbekistan

PART II



Теорема 1. Функция $\Phi_s(y,x)$ определяемая при помощи формулы (3)-(6), является полигармонической функцией порядка n по y при $s > 0$.

Теорема 2. Для функция $\Phi_s(y,x)$ определяемая при помощи формулы (3)-(5)-(6) имеет место

$$\Phi_s(y,x) = \lambda_1 \left(r^{2n-m} + r^{2n-2} G_s(y,x)\right),$$

при $m = 2k+1, k \geq 1$ и при всех $m = 2k$, $k = 2,3,\ldots$ с условием $2n < m$

$$\Phi_s(y,x) = r^{2n+1} \ln r + G_s(y,x)$$

при всех $m = 2k$, $k = 2,3,\ldots$ с условием $2n \geq m$, где $G_s(y,x)$ -гармоническая функция по переменной y, включая точку x во всем пространстве $R^m(\lambda_1 \in R)$.

Литература

1.Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. Москва, Наука, 1978, с.254-264.

2.Ярмухамедов Ш.Задача Коши для полигармонического уравнения. Доклады Академии Наук, Т.388, є 2, 2003, с.162-165.

3.Жураева Н.Ю. Задача Коши для растущих полигармонических функций. Международная конференция "Обратные и некорректные задачи математической физики"посвященная 75-летию академика М.М.Лаврентьева. Новосибирск. 2007. с.65-67.

О БАЗИСНЫХ СВОЙСТВАХ КОРНЕВЫХ ВЕКТОРОВ НАГРУЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Иманбаев Н. С.

Южно-Казахстанский государственный педагогический университет, г. Шымкент, Республика Казахстан;

e-mail: imanbaevnur@mail.ru

Для несамосопряженных обыкновенных дифференциальных операторов на базисность системы корневых функций, помимо краевых условий, могут влиять также значения коэффициентов дифференциального оператора. При этом базисные свойства корневых функций могут изменяться даже при сколь угодном малом изменении значений коэффициентов [1]. Идеи В.А.Ильина [1] были развиты А.С. Макиным [2] на случай несамосопряженного возмущения самосопряженной периодической задачи, где оператор изменялся за счет возмущения одного из краевых условий.

Рассматривается другой вариант возмущения самосопряженной задачи, а именно спектральная задача следующего вида

$$-u''(x) + q(x)\,u(0) = \lambda u(x), \quad 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$u(0) = u(1), \quad u'(0) = u'(1). \tag{2}$$

Уравнения типа (1) относят к классу так называемых нагруженных дифференциальных уравнений, так как второе слагаемое в левой части равенства (1) содержит значение искомой функции в точке нуль. Задача (1)-(2) является несамосопряженным возмущением самосопряженной периодической задачи. В отличие от работы [2], здесь возмущение происходит за счет изменения уравнения.

Свойства базисности корневых функций нагруженных дифференциальных операторов были изучены в работе Н.С. Лозова [3]. Ему удалось распространить метод спектральных разложений В.А. Ильина [1] на случай нагруженных дифференциальных операторов.

В случае, когда $q(x) = 0$, системой собственных функций задачи (1)-(2) является обычная тригонометрическая система, которая образует полную ортонормированную систему в $L_2(0,1)$. В случае же, когда $q(x) \neq 0$ требуется дополнительное исследование. Разные другие подходы к исследованию задачи (1)-(2) были опубликованы в нашей работе [1]. Обозначим через множество функций $q(x) \in L_1(0,1)$ таких, что система собственных и присоединенных функций задачи (1)-(2) образует базис Рисса в L_2. Основным результатом работы является следующая

Теорема. *Пусть $q(x) \in L_1(0,1)$. Тогда множество $\mathfrak{U}$ всюду плотно в $L_2(0,1)$.*

Схема доказательства. Считая $u(0)$– некоторой независимой константой, можно убедиться, что общее решение уравнения (1) представимо в виде

$$u(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} + u(0)\int_0^x q(\xi)\frac{\sin\sqrt{\lambda}(x-\xi)\,d\xi}{\sqrt{\lambda}}. \tag{3}$$

Отсюда, полагая сначала $x = 0$ а затем удовлетворяя (3) краевым условиям (2), получаем систему из трех уравнений, которая в векторно-матричной форме представимо в виде:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ \cos\sqrt{\lambda} & \frac{-\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} & 1 - \int_0^1 q(\xi)\frac{\sin\sqrt{\lambda}(1-\xi)}{\sqrt{\lambda}}d\xi \\ \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} & 1-\cos\sqrt{\lambda} & -\int_0^1 q(\xi)\cos\sqrt{\lambda}(1-\xi)d\xi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ u(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Несложными вычислениями получаем, что характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ спектральной задачи (1)-(2) представляется в виде

$$\Delta(\lambda) = 2\sin\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\left[-2\sin\frac{\sqrt{\lambda}}{2} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_0^1 q(t)\cos\sqrt{\lambda}\left(\frac{1}{2}-t\right)dt\right] \tag{5}$$

Функцию $q(x)$ представим в виде тригонометрического ряда Фурье

$$q(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2\pi nx + b_n \sin 2\pi nx.$$

Тогда, после вычисления, из (5) имеем

$$\Delta(\lambda) = 4\sin^2\frac{\sqrt{\lambda}}{2}\cdot\left[-1 + \frac{a_0}{2\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\lambda - (2\pi n)^2}\right]. \tag{6}$$

Далее исследуем характер поведения нулей целой функции (6).

Литература

1. Ильин В.А. О связи между видом краевых условий и свойствами базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом разложений по корневым функциям

Distribution of eigenvalues of a third-order differential operator with strongly regular boundary conditions

Nurlan S. Imanbaev

Citation: AIP Conference Proceedings **1997**, 020027 (2018); doi: 10.1063/1.5049021
View online: https://doi.org/10.1063/1.5049021
View Table of Contents: http://aip.scitation.org/toc/apc/1997/1
Published by the American Institute of Physics

Distribution of Eigenvalues of a Third-Order Differential Operator with Strongly Regular Boundary Conditions

Nurlan S. Imanbaev

South-Kazakhstan State Pedagogical University, 160012, Shymkent, Kazakhstan

imanbaevnur@mail.ru

Abstract. This paper is devoted to a differential operator generated by the ordinary differential equation and nonlocal boundary conditions. It is proved that the characteristic determinant of the considered spectral problem is an entire function.

INTRODUCTION

In the space $L_2(0, 1)$ we consider an operator L_0, generated by the ordinary differential equation

$$l(u) = P_0(x)u'''(x) + P_1(x)u''(x) + P_2(x)u'(x) + P_3(x)u(x) \tag{1}$$

and the boundary conditions

$$U_1(u) = u(0) = 0,\ U_2(u) = u(1) = 0,\ U_3(u) = u'(0) - u'(1) = 0. \tag{2}$$

Let L_0 be an operator in $L_2(0, 1)$, given by the expression (1) and the boundary conditions (2), where $U_1(u)$, $U_2(u)$, $U_3(u)$ are linear forms, that are regular by G. D. Birkhoff [1, 2]. An important result, established by Birkhoff, consisted in estimating the resolvent of a regular differential operator and in establishing the asymptotic behavior of spectrum. In the monograph of M. A. Naimark [3, p. 67], a subclass of regular boundary conditions, so-called strongly regular boundary conditions, is distinguished, where it is noted that for an odd-order equation all regular conditions are strongly regular. Therefore, according to [3], the boundary conditions (2) are strongly regular boundary conditions.

ADJOINT PROBLEM

We consider a case when $P_0(x) = +1$, $P_1(x) = P_2(x) = P_3(x) = 0$, that is

$$L_0 u \equiv l(u) = +u'''(x). \tag{3}$$

Using integration by parts, we obtain the Lagrange formula

$$\int_0^1 l(u)\overline{v(x)}dx + \int_0^1 u(x)\overline{l^*(v)}dx = u''(1)\overline{v(1)} - u''(0)\overline{v(0)} - \left[\overline{v'(0)} - \overline{v'(1)}\right]u'(0)$$
$$+u(1)\overline{v''(1)} - u(0)\overline{v''(0)}.$$

Here, $l^*(v)$ is the conjugate differential expression:

$$l^*(v) = -v'''(x),\ 0 < x < 1. \tag{4}$$

Consequently, the operator L_0^* wich is adjoint to the operator L_0, is given by the differential expression (4) and boundary conditions

$$V_1(v) \equiv v(1) = 0,\ V_2(v) \equiv v(0) = 0,\ V_3(v) = v'(0) - v'(1) = 0. \tag{5}$$

International Conference on Analysis and Applied Mathematics (ICAAM 2018)
AIP Conf. Proc. 1997, 020027-1–020027-5; https://doi.org/10.1063/1.5049021
Published by AIP Publishing. 978-0-7354-1713-7/$30.00

STATEMENT OF THE PROBLEM AND MAIN RESULT

In this paper, we consider a spectral problem close to the investigation [4]:

$$L_0 u \equiv l(u) = u'''(x) = -\lambda u(x), \ 0 < x < 1 \tag{6}$$

with the boundary conditions (2).

In [4] stability questions of basis properties of root vectors of a n-th order differential operator under integral perturbation of boundary condition are investigated. And also in [5] these questions were studied for the Sturm-Liouville operator, with integral perturbation of one of boundary conditions of the antiperiodic type.

The adjoint problem has the following form:

$$L_0^* v \equiv l^*(v) = -v'''(x) = \bar{\lambda} v(x), \ 0 < x < 1 \tag{7}$$

with boundary conditions (5).

In the case when $\lambda = 0$, representing the general solution (6) in the form $u(x) = ax^2 + bx + c$, and satisfying the boundary conditions (2), we have $u(x) = 0$, that is, $\lambda_0 = 0$ is not eigenvalues of the operator L_0. Consequently, $\lambda_0 = 0$ is a regular point and belongs to the resolvent set of the operator L_0, that is $0 \in \rho(L_0)$. Then there exists an inverse operator $(L_0 - \lambda E)^{-1}$, where $\mathring{A}$ is a unit operator. In the case $\lambda \neq 0$, general solution of the equation (6) can be represented by the formula $u(x) = \sum_{j=1}^{3} C_j e^{k_j \sqrt[3]{\lambda} x}$, where $\left(k_j \sqrt[3]{\lambda}\right)^3 = \lambda$. Hence, it follows, that $k_j^3 = 1; j = \overline{1,3}$, i.e. $k_1 = 1$, $k_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $k_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Satisfying the general solution of the equation (6) by the boundary conditions (2), we obtain a linear system with respect to the coefficients C_j :

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 0, \\ C_1 e^{k_1 \sqrt[3]{\lambda}} + C_2 e^{k_2 \sqrt[3]{\lambda}} + C_3 e^{k_3 \sqrt[3]{\lambda}} = 0, \\ C_1 k_1 \sqrt[3]{\lambda}\left(1 - e^{k_1 \sqrt[3]{\lambda}}\right) + C_2 k_2 \sqrt[3]{\lambda}\left(1 - e^{k_2 \sqrt[3]{\lambda}}\right) + C_3 k_3 \sqrt[3]{\lambda}\left(1 - e^{k_3 \sqrt[3]{\lambda}}\right) = 0. \end{cases}$$

Its determinant will be the characteristic determinant of problem (6), (2):

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e^{k_1 \sqrt[3]{\lambda}} & e^{k_2 \sqrt[3]{\lambda}} & e^{k_3 \sqrt[3]{\lambda}} \\ k_1 \sqrt[3]{\lambda}\left(1 - e^{k_1 \sqrt[3]{\lambda}}\right) & k_2 \sqrt[3]{\lambda}\left(1 - e^{k_2 \sqrt[3]{\lambda}}\right) & k_3 \sqrt[3]{\lambda}\left(1 - e^{k_3 \sqrt[3]{\lambda}}\right) \end{vmatrix}.$$

Whence by standard computations and transformations the characteristic determinant of the problem (6), (2) reduces to the form:

$$\Delta(\lambda) = \sqrt[3]{\lambda}\Big((k_2 - k_3) e^{k_1 \sqrt[3]{\lambda}} + (k_1 - k_2) e^{(k_2 + k_1)\sqrt[3]{\lambda}} \tag{8}$$

$$+ (k_3 - k_1) e^{k_2 \sqrt[3]{\lambda}} + (k_3 - k_1) e^{(k_3 + k_1)\sqrt[3]{\lambda}} + (k_1 - k_2) e^{k_3 \sqrt[3]{\lambda}} + (k_2 - k_3) e^{(k_2 + k_3)\sqrt[3]{\lambda}}\Big),$$

where $k_1 = 1$, $k_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $k_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Let us formulate the obtained result in the form of a theorem.

Theorem 1 *The characteristic determinant of spectral problem (6), (2) can be represented in the form of the exponential quasipolynomial (8), where $k_1 = 1$, $k_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $k_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, and is an entire analytic function of the variable λ.*

Connection between zeros of quasipolynomials with spectral problems is reflected in [6–10]. Papers [3] and [11–13] are devoted to the investigation of zeros of entire functions, having an integral representation and coinciding with quasipolynomials.

Consider a problem of zeros distribution of the entire function $\Delta_1(\lambda) = \frac{\Delta(\lambda)}{\sqrt[3]{\lambda}}$ on the complex plane λ.

$$\begin{aligned} \Delta_1(\lambda) &= (k_2 - k_3) e^{k_1 \sqrt[3]{\lambda}} + (k_1 - k_2) e^{(k_2 + k_1)\sqrt[3]{\lambda}} \\ &+ (k_3 - k_1) e^{k_2 \sqrt[3]{\lambda}} + (k_3 - k_1) e^{(k_3 + k_1)\sqrt[3]{\lambda}} + (k_1 - k_2) e^{k_3 \sqrt[3]{\lambda}} \\ &+ (k_2 - k_3) e^{(k_2 + k_3)\sqrt[3]{\lambda}} = 0 \end{aligned} \tag{9}$$

Conjugate indicator diagram of the function $\Delta_1(\lambda)$ will be a right hexagon on the complex plane λ. Sides of the hexagon consist of the following segments:

$$\left(\overline{k_1}, \overline{k_3+k_1}\right); \left(\overline{k_3}, \overline{k_3+k_1}\right); \left(\overline{k_2+k_3}, \overline{k_3}\right);$$

$$\left(\overline{k_2}, \overline{k_2+k_3}\right); \left(\overline{k_2}, \overline{k_2+k_1}\right); \left(\overline{k_2+k_1}, \overline{k_1}\right),$$

where the bar denotes complex conjugation, and are commensurable numbers, that is, they satisfy the conditions: there exists d such that

$$\begin{aligned} k_1-(k_2+k_3) &= S_1 d,\ (k_2+k_1)-(k_2+k_3) = S_2 d,\ k_2-(k_2+k_3) = S_3 d, \\ (k_3+k_1)-(k_2+k_3) &= S_4 d,\ k_3-(k_2+k_3) = S_5 d, \end{aligned}$$

S_j are some natural numbers.

Along the ray, perpendicular to the segment that passes through the points $\left(\overline{k_1}, \overline{k_3+k_1}\right)$, there lie zeros of the quasipolynomial $e^{k_1\sqrt[3]{\lambda}} + e^{(k_3+k_1)\sqrt[3]{\lambda}}$, which are the majorizing exponents from (9).

Rays, which are perpendicular to the indicator diagram, are called critical. According to the result of the monograph [7], the critical rays on the plane λ are exactly six, that is, $\arg\sqrt[3]{\lambda} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n = 0, 1, 2, 4, 5$;

Similarly, along the other rays, the corresponding exponential quasipolynomials in (9) will be majorized. We multiply both sides of the equation (9) by $e^{-(k_2+k_3)\sqrt[3]{\lambda}}$, according to the commensurability condition, $k_1-(k_2+k_3) = S_1 d$, instead of $(k_2+k_1)-(k_2+k_3)$ we put $S_2 d, \ldots$, instead of $k_3-(k_2+k_3)$ we put $S_5 d$. Then

$$(k_2-k_3)e^{S_1 d\sqrt[3]{\lambda}} + (k_1-k_2)e^{S_2 d\sqrt[3]{\lambda}} + (k_3-k_1)e^{S_3 d\sqrt[3]{\lambda}}$$

$$+ (k_3-k_1)e^{S_4 d\sqrt[3]{\lambda}} + (k_1-k_2)e^{S_5 d\sqrt[3]{\lambda}} + (k_2-k_3) = 0.$$

We denote $e^{d\sqrt[3]{\lambda}}$ by Z. Therefore,

$$i\sqrt{3}\cdot Z^{S_1} + \frac{1}{2}\left(3-i\sqrt{3}\right)Z^{S_2} - \frac{1}{2}\left(3+i\sqrt{3}\right)Z^{S_3}$$

$$-\frac{1}{2}\left(3+i\sqrt{3}\right)Z^{S_4} + \frac{1}{2}\left(3-i\sqrt{3}\right)Z^{S_5} + i\sqrt{3} = 0.$$

This is an algebraic equation, it has exactly as many solutions as the greatest degree of the equation. Denote this degree by $m = \max(S_1, S_2, S_3, S_4, S_5)$. Let $Z_1, Z_2, \ldots, Z_m$ be a solution of the algebraic equation. Now we find $\sqrt[3]{\lambda}$ from the equation

$$\begin{aligned} e^{d\sqrt[3]{\lambda}} &= z_j, \quad j = \overline{(1;m)}, \\ L_n e^{d\sqrt[3]{\lambda}} &= L_n z_j d\sqrt[3]{\lambda} = L_n z_j = \ln|z_j| + i\left(Arg\left(z_j\right) + 2\pi k\right), \\ \sqrt[3]{\lambda}_{jk} &= \frac{\ln|z_j| + i\left(Arg\left(z_j\right) + 2\pi k\right)}{d},\ k = 0, \pm1, \pm2, \cdots;\ j = \overline{(1,m)}, \\ \lambda_{jk} &= \frac{\left(\ln|z_j| + i\left(Arg\left(z_j\right) + 2\pi k\right)\right)^3}{d^3},\ k = 0, \pm1, \pm2, \cdots;\ j = \overline{(1;m)}. \end{aligned}$$

Thus, we have the following proposition.

Proposition 2 *We have the following assertions:*

1. *Here infinitely many eigenvalues of the operator L_0 exist;*
2. *Distance between two neighboring eigenvalues of one series (j – const) is exactly equal to $\frac{2\pi}{|d|}$;*
3. *Eigenvalues of each series lie on the rays, perpendicular to the segment that contain the numbers*

$$\left(\overline{k_1}, \overline{k_3+k_1}\right); \left(\overline{k_3}, \overline{k_3+k_1}\right); \left(\overline{k_2+k_3}, \overline{k_3}\right);$$

$$\left(\overline{k_2\,\overline{k_2+k_3}}\right);\ \left(\overline{k_2},\ \overline{k_2+k_1}\right);\ \left(\overline{k_2+k_1},\ \overline{k_1}\right).$$

In particular, we consider in detail each case of finding zeros of the entire function (8):

$$e^{k_1\sqrt[3]{\lambda}}+e^{(k_3+k_1)\sqrt[3]{\lambda}}=0,$$

that is

$$i\sqrt{3}\,e^{\sqrt[3]{\lambda}}+\left(-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)e^{\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{\lambda}}=0,$$

$$\sqrt[3]{\lambda_k}=\frac{\ln\left|\frac{2\sqrt{3}\,i}{3+\sqrt{3}i}\right|+i\arg\left(\frac{2\sqrt{3}i}{3+\sqrt{3}i}\right)}{-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}+\frac{2\pi ki}{-\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)},$$

$$k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\cdots,$$

They coincide with zeros $\left(-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)e^{\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{\lambda}}+i\sqrt{3}\,e^{-\sqrt[3]{\lambda}}$. *Other terms from (8) do not contribute to these rays. Similarly,*

$$i\sqrt{3}\,e^{\sqrt[3]{\lambda}}+\left(\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)e^{\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{\lambda}}=0,$$

$$\sqrt[3]{\lambda_k}=\frac{\ln\left|\frac{2\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}i}\right|-i\arg\left(\frac{2\sqrt{3}i}{3-\sqrt{3}i}\right)}{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}+\frac{2k\pi i}{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}},$$

$$k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\cdots,$$

which adequately coincide with zeros $e^{k_3\sqrt[3]{\lambda}}+e^{(k_2+k_3)\sqrt[3]{\lambda}}$. *Quasipolynomials, coinciding along the imaginary axis:*

$$\left(\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)e^{-\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{\lambda}}-\left(\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)e^{\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{\lambda}}=0,$$

and

$$-\left(\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)e^{\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{\lambda}}+\left(\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)e^{\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\sqrt[3]{\lambda}}=0$$

have the same zeros $\sqrt[3]{\lambda_k}=\ln\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)+2k\pi i,\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3,\cdots$.

In this case, exhibitors of the other series do not contribute and $|d|=1,\ j=(\overline{1,6})$.

ACKNOWLEDGMENTS

The paper was supported by the state grant "The Best Teacher of the University-2017" of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan.

REFERENCES

[1] G. D. Birkhoff, Transactions of the American Mathematical Society **9**, 219–231 (1908).
[2] G. D. Birkhoff, Transactios of the American Mathematical Society **9**, 373–395 (1908).
[3] M. A. Naimark, *Linear Differential Operators* (Science, Moscow, 1969).
[4] M. A. Sadybekov and N. S. Imanbaev, Mathematical Notes **101**, 878–887 (2017).
[5] N. S. Imanbaev, Electron. J. Diff. Equ. **2016**, 1–8 (2016).

[6] R. Bellman and K. Cook, *Differential-Difference Equations* (Moscow, 1967).
[7] A. F. Leont'ev, *Entire Functions and Series of Exponentials* (Moscow, 1983).
[8] O. H. Hald, Communications on Pure Applied Mathematics **XXXVII**, 539–577 (1984).
[9] V. B. Lidsky and V. A. Sadovnichiy, Functional Analysis **1**, 52–59 (1967).
[10] A. M. Sedletskii, Sbornik: Mathematics **186**, 1353–1362 (1995).
[11] A. A. Shkalikov, Vestnik MGU. Series Math. Mech **6**, 12–21 (1982).
[12] N. S. Imanbaev, B. E. Kanguzhin, and B. E. Kalimbetov, Advances in Difference Equations **2013**, (2013) (DOI: 10.1186/1687-1847-20113-110).
[13] M. M. Malamud and L. L. Oridoroga, Doklady Mathematics **82**, 809–905 (2010).

СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

Материалы международной конференции, посвященной 80-летию академика РАН В.А.Садовничего

CONTEMPORARY PROBLEMS OF MATHEMATICS AND MECHANICS

Proceedings of the international conference dedicated to the 80th anniversary of academician V.A. Sadovnichy

2019

УДК 517+ 519+531
ББК 22.162:22.193: 22.19:22.311:22.2
С56

DOI 10.29003/m978-5-317-06111-1

Издание осуществлено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) по проекту 19-01-20097 и попечительского Совета МГУ имени М. В. Ломоносова

Современные проблемы математики и механики. Материалы международной конференции, посвященной 80-летию академика РАН В. А. Садовничего. – Москва : МАКС Пресс, 2019. – 824 с.

С56

e-ISBN 978-5-317-06111-1 print-ISBN 978-5-317-06133-3

Книга составлена из коротких заметок, в которых представлены результаты исследований участников международной конференции, посвященной 80-летию академика РАН В. А. Садовничего. В книге представлены 5 направлений математики и механики, в которых активно работал В. А. Садовничий. Эти направления совпадают с названиями секций конференции.

1. Теория операторов и функциональный анализ.
2. Дифференциальные уравнения.
3. Теория функций и вычислительная математика.
4. Геометрия и математическая физика.
5. Механика и математическое моделирование.

Ключевые слова: теория операторов, спектральная теория, дифференциальные уравнения, дифференциальная геометрия, теория функций, математическая физика, механика, математическое моделирование.

e-ISBN 978-5-317-06111-1

$$D^{r_1\cdots r_n}(x) = \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}\Gamma(-r_k)}\cdot\frac{1}{\overset{+}{x}_1^{1+r_1}}\times\frac{1}{\overset{+}{x}_2^{1+r_2}}\times\cdots\times\frac{1}{\overset{+}{x}^{1+r_n}},$$

где

$$\overset{+}{x}^{\gamma} = \begin{cases} x^{\gamma}, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Таким образом под дробной обобщенной производной Лиувилля будем понимать свертку обобщенной функции $f \in \Phi'$ с обобщенной функцией $D^{r_1\cdots r_n}x \in \Phi'$. Операторы $D^{r_1\cdots r_n}$ образуют аддитивную перестановочную группу по вектор-параметру $(r_1, \cdots, r_n)$ и при $r_k < 0, k = 1; h$, приводят к интегралу Римана-Лиувилля порядка $\alpha = (\alpha_1 \cdots \alpha_n)$.

В работах [2, 3] рассматриваются близкие по идее вопросы.

Литература

1. *П. И. Лизоркин* Обобщенное лиувиллевское дифференцирование и функциональные пространства $L_p^r(E_n)$. Теоремы вложения // Матем. сб., **60**:3 (1963), 325–353.

2. *К. Х. Бойматов, П. И. Лизоркин* Оценки роста решений дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения **25**:4 (1989), 578–588.

3. *Илолов М., Кучакшоев Х.С., Гулджонов Д.Н.* О дробных линейных уравнениях в банаховых пространствах Доклады Академии наук РТ,**61**:2 (2018), 113-119.

О НУЛЯХ ОДНОГО КЛАССА ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ, ИМЕЮЩИХ ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

Н.С. Иманбаев

imanbaevnur@mail.ru

УДК 517.927

Исследуется распределение нулей целых функций специального вида, связанных со спектральными задачами.

Ключевые слова: нули целых функций, интегральное представление, спектр, асимптотика

On the zeros of a class of entire functions, having an integral representation

The question of the distribution of zeros of some specific kind of entire functions connected with spectral problems is studied.

Keywords: zeros of entire functions, integral representation, spectrum, asymptotics

Иманбаев Нурлан Сайрамович, к.ф.-м.н., профессор, Южно-Казахстанский государственный педагогический университет (Шымкент, Казахстан); Nurlan Imanbaev (South Kazakhstan State Pedagogical University, Shymkent, Kazakhstan.)

Рассматривается вопрос распределения нулей целых функций вида

$$f(z) = 1 + Az + z^2 \cdot \int_0^1 \int_0^1 \sum_{j=0}^{2} \exp\left(\rho(\omega_j x + \omega_{j+1} y)\right) \cdot D(x,y)dxdy, \qquad (1)$$

где $\rho = \sqrt[3]{z}$, $\omega_j = \exp\left(\frac{2\pi ij}{3}\right)$, $i = \sqrt{-1}$, A-константа, $D(x,y)$ — абсолютно интегрируемая функция.

Исследование нулей целых функций вида (1), совпадающих с квазиполиномами, и их связь со спектральными задачами отражена в [1-4].

Теорема 1. *Пусть $D(x,y)$ абсолютно интегрируемая на квадрате $[0,1]\times[0,1]$ функция. Если функция $D(x,y)$ непрерывна и отлична от нуля в окрестности квадрата, тогда нули функции $f(z)$, достаточно большие по модулю, могут быть только в секторах сколь угодно малого раствора ε*

$$\left|Argz \pm \frac{\pi}{2}\right| < \varepsilon.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и пусть величина $\omega_1 D(1,0) + D(0,1)$ отлична от нуля, тогда нули z_k функции $f(z)$ достаточно большие по модулю, принадлежащие сектору $|Argz - \frac{\pi}{2}| < \varepsilon$, имеют асимптотику*

$$\sqrt[3]{z_k} = \left(\frac{-2ik\pi}{\omega_2} + \frac{1}{\omega_2} \cdot \ln\left(\frac{\omega_1 D(1,0) + D(0,1)}{D(1,1)}\right)\right)$$
$$+O\left(\max\left(\ln k\omega(\sqrt{2}\frac{\ln k}{k});1\right)\right), \quad k >> 1,$$

где $\omega(\delta)$-модуль непрерывности функции $D(x,y)$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и пусть величина $D(1,0) + \omega_2 D(0,1)$ отлична от нуля, тогда нули z_k функции $f(z)$ достаточно большие по модулю, принадлежащие сектору $|Argz + \frac{\pi}{2}| < \varepsilon$, имеют асимптотику*

$$\sqrt[3]{z_k} = \left(\frac{2ik\pi}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_1} \cdot \ln\left(\frac{D(1,0) + \omega_2 D(0,1)}{D(1,1)}\right)\right)$$
$$+O\left(\max\left(\ln k\omega(\sqrt{2}\frac{\ln k}{k});1\right)\right), \quad k >> 1,$$

Доказана следующая [5]:

Теорема 4. *Пусть функция $f(z)$ имеет вид (1). Допустим, что функция $D(x,y)$ в квадрате $[0,1]\times[0,1]$ имеет непрерывные частные производные до третьего порядка по переменным x, y. Если $\omega_1 D(1,0) + D(0,1) \neq 0$ и $D(1,1) \neq 0$, то нули z_k функции $f(z)$ имеют ту же асимптотику, что и в теоремах 2, 3, остаточный член которых записывается в виде $O(1/k)$.*

В формулировках теорем 2, 3, числа, выраженные через логарифмы, можно включить в остаточные члены. В то же время в теореме 4 эти величины существенно уточняют асимптотику.

Литература

1. *Шкаликов А.А.* О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями // Вестник МГУ. Сер. Мат. Мех., **No.6** (1982), 41–51.

2. *Садовничий В.А., Любишкин В.А., Белаббаси Ю.* О нулях целых функций одного класса // Труды семинара им. И.Г. Петровского, Вып. **8** (1982), 211–217.

3. *Седлецкий А.М.* Когда все нули целой функции экспоненциального типа лежат в криволинейной полуплоскости (необходимое условие) // Мат. сб., **186**:9 (1995), 125–134.

4. *Иманбаев Н.С., Кангужин Б.Е.* О нулях целых функций, имеющих интегральное представление // Известия НАН РК. Сер. физ-мат., **No.3** (1995), 47–52.

5. *Imanbaev N.S., Kanguzhin B.E., Kalimbetov B.T.* On zeros of the characteristic determinant of the spectral problem for a third-order differential operator on a segment with nonlocal boundary conditions // Advances in Difference Equations, **2013**:110 (2013), 1–5.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН
КОМИТЕТ НАУКИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан,

посвященная 1150-летию Абу Насыр аль-Фараби и 75-летию Института математики и математического моделирования

Тезисы докладов

Алматы - 2020 год

О СВОЙСТВЕ БАЗИСНОСТИ СИСТЕМЫ КОРНЕВЫХ ВЕКТОРОВ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ ПРИ ИНТЕГРАЛЬНОМ ВОЗМУЩЕНИИ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ В НЕУСИЛЕННО РЕГУЛЯРНЫХ ЗАДАЧАХ ТИПА САМАРСКОГО-ИОНКИНА

Нурлан ИМАНБАЕВ

Южно-Казахстанский государственный педагогический университет, Шымкент, Казахстан

imanbaevnur@mail.ru

В докладе рассматривается оператор, заданный дифференциальным выражением двукратного дифференцирования и краевыми условиями типа Самарского-Ионкина. Хорошо известно, что эти условия являются регулярными, но не усиленно регулярным краевыми условиями. Нами исследуется вопрос устойчивости и неустойчивости свойства базисности системы собственных и присоединенных функций (СиПФ) возмущенного оператора, получаемого при интегральном возмущении одного из краевых условий:

$$L_1(u) \equiv -u''(x) = \lambda u(x),\ 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$U_1(u) \equiv u'(0) + u'(1) = 0,\ \int_0^1 \overline{p(x)} u(x) dx,\ p(x) \in L_2(0,1), \tag{2}$$

$$U_2(u) \equiv u(0) = 0. \tag{3}$$

Если $p(x) \equiv 0$, то задача (1)-(3) называется задачей Самарского-Ионкина.

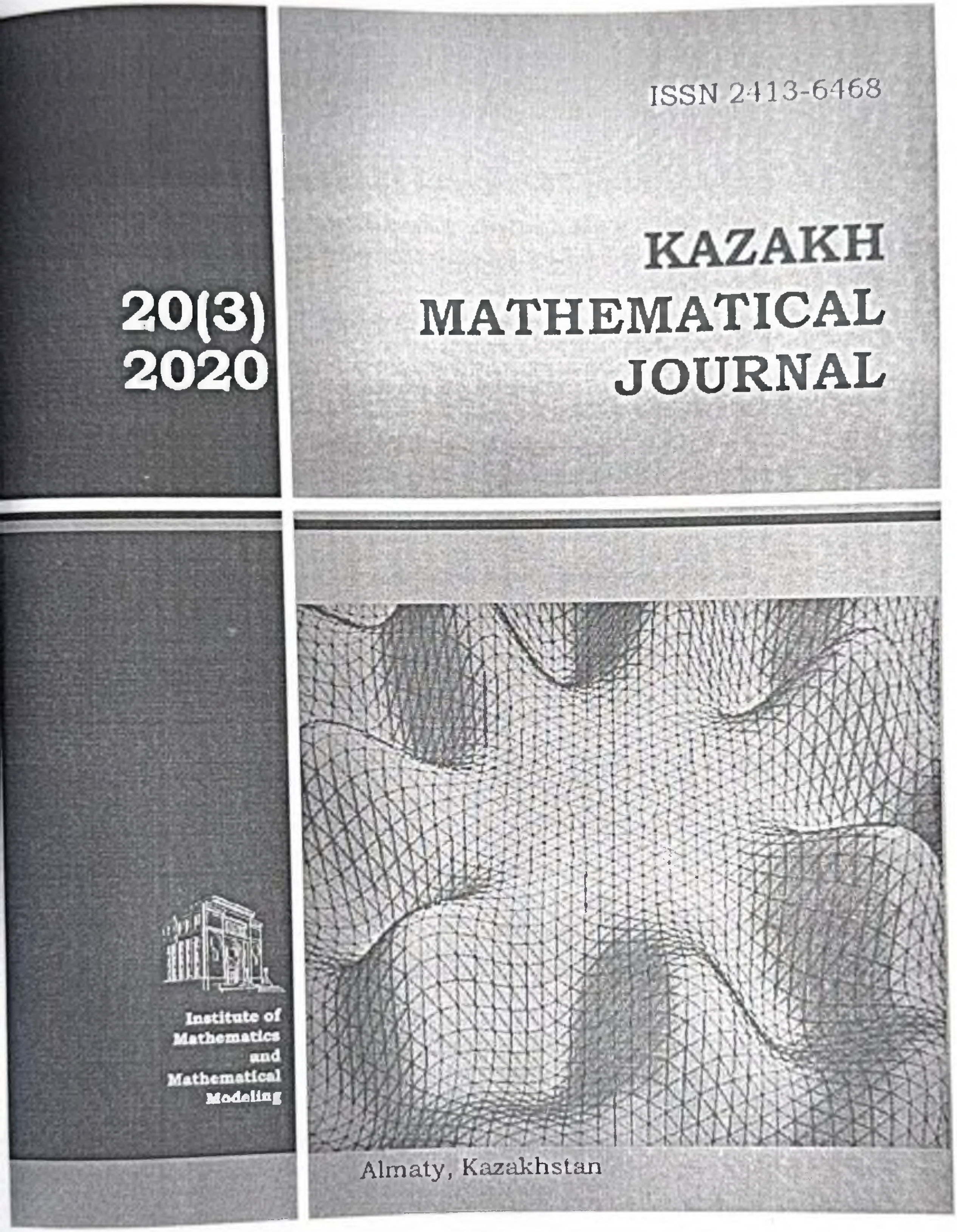
Из результатов работы А.А. Шкаликова [1] следует, что система СиПФ задачи (1)-(3) полна и минимальна в $L_2(0,1)$. При этом система СиПФ при любых $p(x)$ образует базис Рисса со скобками. Нашей задачей является демонстрация того, что свойство базисности в $L_2(0,1)$ системы СиПФ задачи (1)-(3) является неустойчивым при малых изменениях ядра $p(x)$ интегрального возмущения.

В нашей работе [2] предложена методика построения характеристического определителя спектральной задачи при интегральном возмущении краевого условия. Этот результат мы применяем к исследованию спектарльных свойств задачи (1)-(3). Вопросы условной базисности и исследование спектральных свойств нелокальных задач рассмотрены в работах многих математиков. В наших работах также рассмотрены задачи с различными нелокальными условиями.

Основным результатом доклада является следующая теорема, демонстрирующая неусточивость свойства безусловной базисности системы СиПФ при интегральном возмущении краевогоу словия.

Теорема. *Множество* $\boldsymbol{P}$ *функций* $p(x) \in L_2(0,1)$, *для которых система собственных и присоединенных функций задачи (1)-(3) образует безусловный базис в* $L_2(0,1)$, *всюду плотно в* $L_2(0,1)$. *Множество* $L_2(0,1)\backslash \boldsymbol{P}$, *то есть множество функций* $p(x) \in L_2(0,1)$, *для которых система собственных и присоединенных функций задачи (1)-(3) не образует безусловного базиса в* $L_2(0,1)$, *также всюду плотно в* $L_2(0,1)$.

Автор был поддержан грантом КН МОН РК AP05132587


ISSN 2413-6468
KAZAKH
MATHEMATICAL
JOURNAL
20(3)
2020
Institute of
Mathematics
and
Mathematical
Modeling
Almaty, Kazakhstan

Kazakh Mathematical Journal ISSN 2413–6468

20:3 (2020) 48–56

On basis property of systems of eigenfunctions of a loaded second-order differential operator with antiperiodic boundary value conditions

Nurlan S. Imanbaev[1,2,a]

[1]South Kazakhstan State Pedagogical University, Shymkent, Kazakhstan
[a]e-mail: imanbaevnur@mail.ru
[2]Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

Communicated by: Abdizhakhan Sarsenbi

Received: 02.08.2020 ⋆ Final Version: 02.09.2020 ⋆ Accepted/Published Online: 25.09.2020

Abstract. We consider an eigenvalue problem for a second-order differential equation with a loaded term that contains value of derivative of the desired function at zero, with regular, but not strong regular boundary value conditions. We study the basis properties of systems of eigenfunctions of the loaded operator of multiple differentiation, with antiperiodic boundary value conditions. It is known that the system of eigenfunctions of an operator defined by formally self-adjoint differential expression with arbitrary self-adjoint boundary value conditions, providing a discrete spectrum, forms an orthonormal basis. Along with this, it is known, that in the case of non-self-adjoint ordinary differential operators, the basis properties of systems of root functions, in addition to boundary conditions, can also be influenced by coefficients of the differential operator. Moreover, the basis properties of root functions can change even at whatever pleasing small change in values of the coefficients. V.A. Il'in first noted this result in his work. A.S. Makin developed the ideas of V.A. Il'in in the case of non-self-adjoint perturbation of a self-adjoint periodic problem. In the work of A.S. Makin the operator changes due to perturbation of one of the boundary value conditions.

In this paper, the considered operator is a non-self-adjoint perturbation of the self-adjoint antiperiodic problem. In contrast to the work of A.S. Makin, here the perturbation occurs due to a change in the equation; and the boundary value conditions are antiperiodic. Characteristic determinant of the considered spectral problem is constructed, which is an entire analytical function. Theorems on stability and instability of the basis property of systems of eigenfunctions are proved.

Keywords. Characteristic determinant, Riesz basis, loaded operator, antiperiodic boundary value conditions, regular, not strong regular, perturbation.

1. Introduction

In the case of non-self-adjoint ordinary differential operators, in addition to the boundary value conditions, values of coefficients of the differential operator also influence to the basis

2010 Mathematics Subject Classification: Primary 34B05, 34L10; Secondary 34B09.

properties of systems of root functions. Knowing this fact, the basis properties of root functions can change with a small change in the values of coefficients. V.A. Il'in first noted this result in his work [1]. A.S. Makin developed the ideas of V.A. Il'in in the case of a non-self-adjoint perturbation of a self-adjoint periodic problem, where operator changes due to the perturbation of one of the boundary conditions [2].

In this paper, we consider another variant of perturbation of the self-adjoint problem, in particular, the spectral problem of the following form in the space $L_2(0,1)$:

$$Lu = -u'' + \overline{q(x)} \cdot u'(0) = \lambda u(x), 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$U_1(u) = u(0) + u(1) = 0, U_2(u) = u'(0) + u'(1) = 0, \tag{2}$$

where $q(x) \in L_1(0,1)$.

Equations of the type (1) belong to the class of loaded differential equations, since the second term on the left-hand side of the equality (1) contains the value of derivative of the desired function at zero. The considered problem (1)–(2) is a non-self-adjoint perturbation of antiperiodic problem, and for a periodic problem they were studied in [3, 4]. In contrast to [2], here the perturbation occurs due to a change in the equation.

Questions of the basis property of root functions of loaded differential operators were studied in the works of I.S. Lomov [5, 6]. He managed to extend the method of spectral decompositions of V.A.Il'in [1] to the case of loaded differential operators. By another method, the basis properties of functional differential equations were studied in [7]. Earlier, other approaches to the study of the Samarsky-Ionkin type problems were published in our works [8,9].

2. Characteristic determinant of a spectral problem

Assuming $u'(0)$ as some independent constant, we see that the general solution of the equation (1) is representable in the form

$$u(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} + u'(0) \int_0^x \overline{q(\zeta)} \frac{\sin\sqrt{\lambda}(x-\zeta)}{\sqrt{\lambda}} d\zeta. \tag{3}$$

Therefore, first considering $x = 0$, and then satisfying (3) the boundary value condition (2), we get the system of the equations, which can be represented in the vector-matrix form as follows:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1+\cos\sqrt{\lambda} & \frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \cdot \int_0^1 \overline{q(\zeta)} \sin\sqrt{\lambda}(1-\zeta)d\zeta \\ -\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} & 1+\cos\lambda & -\int_0^1 \overline{q(\zeta)} \cos\sqrt{\lambda}(1-\zeta)d\zeta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ u'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

We directly obtain the characteristic determinant $\Delta(\lambda)$ from (4):

$$\Delta(\lambda) = 2(1+\cos\sqrt{\lambda}) - (1+\cos\sqrt{\lambda}) \cdot \int_0^1 \overline{q(\zeta)} \cos\sqrt{\lambda}(1-\zeta)d\zeta$$

$$+\sin\sqrt{\lambda} \cdot \int_0^1 \overline{q(\zeta)} \sin\sqrt{\lambda}(1-\zeta)d\zeta \tag{5}$$

In the case when $q(x) = 0$, we get characteristic determinant of the antiperiodic spectral problem:

$$L_0 u = -u''(x) = \lambda u(x), \qquad 0 < x < 1, \tag{6}$$

$$u'(0) + u'(1) = 0, \qquad u(0) + u(1) = 0, \tag{7}$$

$\Delta_0(\lambda) = 2(1+\cos\sqrt{\lambda})$. Numbers $\lambda_k^0 = ((2k-1)\pi)^2, k = 1, 2, 3, \ldots$, are double eigenvalues, moreover

$$u_{k_0}^0 = \sqrt{2}\cos((2k-1)\pi x), \qquad u_{k_1}^0 = \sqrt{2}\sin((2k-1)\pi x)$$

are corresponding eigenfunctions, which form the complete orthonormal system in $L_2(0,1)$.

Function $q(x)$ can be represented in the form of expansion in a Fourier series by the trigonometric system $\{u_{k_0}^0, u_{k_1}^0\}$:

$$q(x) = \sum_{k=1}^{\infty} [a_k cos((2k-1)\pi x) + b_k sin((2k-1)\pi x)]. \tag{8}$$

Then, after calculating the integrals from (5), we have

$$\Delta(\lambda) = \Delta_0(\lambda) \cdot A(\lambda),$$

where

$$A(\lambda) = \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{b_k} \frac{(2k-1)\pi}{\lambda - ((2k-1)\pi)^2}\right]. \tag{9}$$

We formulate the result as the following theorem.

Theorem 1. *Characteristic determinant of the spectral problem for the loaded second-order differential equation with antiperiodic boundary conditions (1)–(2) can be represented in the form (9), where $\Delta_0(\lambda)$ is the characteristic determinant of the antiperiodic spectral problem of multiple differentiation (6)–(7); b_k are Fourier coefficients of the expansion (8) of the functions $q(x)$ by the trigonometric system of eigenfunctions of the spectral problem (6)–(7).*

Remark 1. *The function $A(\lambda)$ from (9) has poles of the second order at the points $\lambda = \lambda_k^0$, but the function $\Delta_0(\lambda)$ has zeros of the second order at the same points. Therefore, the function $\Delta(\lambda)$, represented by the formula (9), is an entire analytic function of the variable λ.*

3. The case of the basis property of root functions

The characteristic determinant (9) looks simpler when

$$q(x) = \sum_{k=1}^{N} [a_k cos((2k-1)\pi x) + b_k sin((2k-1)\pi x)].$$

That is, there exists a number N such that $a_k = b_k = 0$ for all $k > N$. In this case, formula (9) takes the form

$$\Delta_1(\lambda) = \Delta_0(\lambda) \left[1 + \sum_{k=1}^{N} \overline{b_k} \frac{(2k-1)\pi}{\lambda - ((2k-1)\pi)^2} \right]. \tag{10}$$

From this particular case of formula (9), we have the following corollary.

Corollary 1. *For any preassigned numbers (a complex λ and a positive integer $\hat{m}$) there always exists a function $q(x)$ such that $\hat{\lambda}$ will be an eigenvalue of problem (1) - (2) of multiplicity $\hat{m}$.*

From the analysis of formula (10) it is easy to see that $\Delta(\lambda_k^0) = 0$ for all $k > N$. That is, all eigenvalues λ_k^0, $k > N$, of the unperturbed antiperiodic problem are the eigenvalues of the spectral problem (1)–(2). It is also not difficult to show that the multiplicity of the eigenvalues λ_k^0, $k > N$, is also preserved. Moreover, from the condition of orthogonality of the trigonometric system it follows that in this case:

$$\int_0^1 \overline{q(x)} u_{kj}^0(x) dx = 0, \; j = \overline{0,1}, \; k > N.$$

Thus, the eigenfunctions $u_{kj}^0(x)$ of the antiperiodic problem when $k > N$ satisfy the boundary value conditions (2) and, therefore, they are eigenfunctions of the spectral problem (1) - (2). Hence, in this case the system of eigenfunctions of (1)–(2) and the system of eigenfunctions of the antiperiodic problem (an orthonormal basis) differ from each other only in a finite number of the first members. Consequently, the system of eigenfunctions of (1)–(2) also forms the Riesz basis in $L_2(0,1)$. The set of functions $q(x)$, that can be represented as a finite series (8), is dense in $L_1(0,1)$. Thus, we have proved the following result.

Theorem 2. *Let $q(x) \in L_1(0,1)$. Then the system of eigenfunctions of the spectral problem (1)-(2) forms Riesz basis in the space $L_2(0,1)$, and is complete in $L_1(0,1)$.*

4. Instability of the basis property

Now we show the absence of the basis properties of eigenfunctions system of the spectral problem (1)–(2).

Theorem 3. *The set of functions $q(x) \in L_1(0,1)$, such that the system of eigenfunctions of the spectral problem (1)-(2) does not form even a normal basis in $L_2(0,1)$, is dense in $L_1(0,1)$.*

Proof. Let in (8) the coefficients $b_k \neq 0$ for all sufficiently large k. Then from (9) we note that $\lambda = \lambda_k^0$ is a simple eigenvalue of the spectral problem (1)–(2). By direct calculation we get that

$$u_k^1 = b_k \cdot \cos((2k-1)\pi)x - a_k \cdot \sin((2k-1)\pi)x$$

are eigenfunctions of (1)–(2), corresponding to $\lambda_k^0 = ((2k-1)\pi)^2$. Moreover, the eigenfunction of the dual problem [10]:

$$L^*(v) \equiv -v''(x) = \lambda v(x), \qquad 0 < x < 1,$$

$$V_1(v) \equiv v'(0) + v'(1) = 0, \qquad V_2(v) = v(0) + v(1) = \int_0^1 q(x)u(x)dx, \qquad q(x) \in L_1(0,1),$$

corresponding to the eigenvalue λ_k^0, is $v_k^1 = c_k \cdot \cos((2k-1)\pi)x$.

Since the eigenfunctions of the dual problems form a biorthogonal system, then we have the equality of the scalar product $(u_k^1, v_k^1) = 1$. Hence, it is easy to obtain $b_k\overline{c_k} = 2$. Therefore,

$$\|u_k^1\| \cdot \|v_k^1\| = \sqrt{1 + \left|\frac{a_k}{b_k}\right|^2}. \tag{11}$$

Denote by $\sigma_N(x)$ a partial sum of the Fourier series (8). It is obvious, that the set of functions, which can be represented as the infinite series

$$\overline{q(x)} = \sigma_N(x) + \sum_{k=N+1}^{\infty} \left[\overline{a_k}\cos((2k-1)\pi x) + \overline{b_k}\sin((2k-1)\pi x)\right],$$

where $\overline{a_k} = 2^{-k}$, $\overline{b_k} = \dfrac{2^{-k}}{k}$, $k > N$, is dense in $L_1(0,1)$. However, from (11) it follows that for the corresponding eigenfunctions $\overline{q(x)}$ and for the corresponding eigenfunctions systems of the direct and adjoint problems the following holds:

$$\lim_{k\to\infty} \|u_k^1\| \cdot \|v_k^1\| = \infty.$$

That is, the condition of uniform minimal property (see [11] and references in it) of the system does not hold, and therefore, it does not form even a basis in $L_2(0,1)$.

Since adjoint operators possess the Riesz basis property of the eigenfunction.

5. Conclusion

Results of this paper demonstrate stability of the basis property of eigenfunctions of a loaded operator of multiple differentiation with antiperiodic boundary conditions that are regular but not strongly regular [12–16].

6. Acknowledgments

Author thanks Professor B.E. Kanguzhin and Corresponding Member of the NAS of RK M.A. Sadybekov for their attention to the work. Author is supported by the funding from the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan.

References

[1] Il'in V.A. *On connection between the types of boundary value conditions and basis properties and equiconvergence with trigonometric series of expansions by root functions of a non-self-adjoint differential operator*, Differential Equations, 30 (1994), 1516-1529.

[2] Makin A.S. *On a nonlocal perturbation of a periodic eigenvalue problem*, Differential Equations, 42 (2006), 599-602.

[3] Imanbaev N.S. and Sadybekov M.A. *Basic properties of root functions of loaded second order differential operators*, Reports of National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan, 2 (2010), 11-13.

[4] Sadybekov M.A. and Imanbaev N.S. *Characteristic Determinant of a Boundary Value Problem, which does not have the basis property*, Eurasian Math. J., 8 (2017), 40-46.

[5] Lomov I.S. *Basis property of root vectors of loaded second order differential operators on an interval*, Differential Equations, 27:1 (1991), 80-94.

[6] Lomov I.S. *Theorem on unconditional basis property of root vectors of loaded second order differential operators*, Differential Equations, 27:9 (1991), 1550-1563.

[7] Gomilko A.M. and Radzievsky G.V. *Basic properties of eigenfunctions of a regular boundary value problem for a vector functional*, Differential Equations, 27:3 (1991), 385-395.

[8] Imanbaev N.S. *On stability of basis property of root vectors system of the Sturm-Liouville operator with an integral perturbation of conditions in nonstrongly regular Samarskii-Ionkin type problems*, International Journal of Differential Equations, 2015:641481 (2015), 1-6.

[9] Sadybekov M.A. and Imanbaev N.S. *On a problem not having the property of basis property of root vectors, connected with the perturbed regular operator of multiple differentiation*, Mathematical Journal, 17 (2017), 117-125.

[10] Imanbaev N.S. and Sadybekov M.A. *Construction of a characteristic determinant for one type of eigenvalue problems under integral perturbation of two boundary conditions*, Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science, 104:4 (2019), 12-23.

[11] Il'in V.A. and Kritskov L.V. *Properties of spectral expansions corresponding to non-self-adjoint differential operators*, Journal of Mathematical Sciences, 116:5 (2003), 3489-3550.

[12] Naimark M.A. *Linear Differential Operators*, Moscow: Nauka, 1969.

[13] Veliev O.A., Shkalikov A.A. *On basis property of eigenfunctions and associated functions of periodic and antiperiodic Sturm-Liouville problems*, Mathematical Notes, 85:5 (2009), 671-686.

[14] Lang P. and Locker J. *Spectral Theory of Two-Point Differential Operators Determined by -D2*, J. Math. Anal. And Appl., 146 (1990), 148-191.

[15] Sadybekov M.A. and Imanbaev N.S. *A Regular Differential Operator with Perturbed Boundary Condition*, Mathematical Notes, 101:5 (2017), 878-887.

[16] Imanbaev N.S. *Stability of the basis property of eigenvalue systems of Sturm-Liouville operators with integral boundary condition*, Electronic Journal of Differential Equations, 87 (2016), 1-8.

Иманбаев Н.С. АНТИПЕРИОДТЫҚ ШЕТТІК ШАРТТАРМЕН БЕРІЛГЕН ЕКІНШІ РЕТТІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ЖҮКТЕЛГЕН ОПЕРАТОРДЫҢ МЕНШІКТІ ФУНКЦИЯЛАР ЖҮЙЕСІНІҢ БАЗИСТІЛІГІ

Регулярлы, бірақ күшейтілмеген регулярлы шеттік шарттармен берілген, құрамында ізделінді функциядан алынған туындының нөл нүктесіндегі мәнімен қамтылған жүктелген қосылғышы бар екінші ретті дифференциалдық теңдеудің меншікті мәндерін зерттеуге арналған есеп қарастырылады. Антипериодтық шеттік шарттармен берілген екінші ретті дифференциалдық жүктелген оператордың меншікті функциялар жүйесінің базистілігі мәселесі зерттеледі. Дискретті спектрмен қамтамасыз ететін еркін түрдегі өзіне-өзі түйіндес шеттік шарттармен және өзіне-өзі түйіндес формальды дифференциалдық амалмен берілген оператордың меншікті функциялар жүйесінің ортонормаланған базис құратындығы белгілі жәй. Осымен қатар, өзіне-өзі түйіндес емес қарапайым дифференциалдық операторлар үшін де түбірлік функциялардың базистілігі не шеттік шарттардан бөлек дифференциалдық оператордың коэффициентерінің мәндері де әсер ететіндігі белгілі. Бұл жағдайда коэффициенттердің мәндері шамалы ғана өзгергенде түбірлік функциялардың базистілік қасиеттеріне әсер етеді. Мұндай нәтиже алғаш В.А. Ильиннің жұмысында аталған болатын. В.А. Ильиннің идеясы өзіне-өзі түйіндес периодтық есеп

үшін өзіне-өзі түйіндес емес толқытылғандағы жағдайда А.С. Макиннің еңбегінде дамытылды. А.С. Макиннің жұмысында оператор шеттік шарттардың біреуін толқытқанда өзгерген болатын.

Бұл мақаладағы қарастырылып отырған оператор өзіне-өзі түйіндес антипериодты есептің өзіне-өзі түйіндес емес толқытуы болып табылады. Қарастырылып отырған жұмыстың А.С.Макиннің еңбегіндегі оператордан өзгешелігі, бұл жұмыста толқыту теңдеуге көшеді және шеттік шарттардың антипериодтылығында. Қарастырылып отырған спектралдық есептің характеристикалық анықтауышы құрылған және ол бүтін аналитикалық функция болып табылады. Меншікті функциялар жүйесінің базистілік қасиеттерінің орнықтылығы, орнықсыздығы туралы теоремалар дәлелденген.

Кілттік сөздер. характеристикалық анықтауыш, Рисс базистілігі, жүктелген оператор, антипериодтық шеттік шарттар, регулярлы, бірақ күшейтілген регулярлы емес, толқытылу.

Иманбаев Н.С. О БАЗИСНОСТИ СИСТЕМ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ НАГРУЖЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА С АНТИПЕРИОДИЧЕСКИМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Рассматривается задача на собственные значения дифференциального уравнения второго порядка с нагруженным слагаемым, содержащим значение производной от искомой функции в точке нуль, с регулярными, но неусиленно регулярными краевыми условиями. Исследуется вопрос базисности систем собственных функций нагруженного оператора кратного дифференцирования с антипериодическими краевыми условиями. Известно, что система собственных функций оператора, заданного формально самосопряженным дифференциальным выражением, с произвольными самосопряженными краевыми условиями, обеспечивающими дискретный спектр, образует ортонормированный базис. Наряду с этим, известно, что в случае несамосопряженных обыкновенных дифференциальных операторов на базисность систем корневых функций, помимо краевых условий, могут влиять также значения коэффициентов дифференциального оператора. При этом базисные свойства корневых функций могут изменяться даже при сколь угодном малом изменении значений коэффициентов. Этот результат впервые отмечен в работе В.А.Ильина. Идеи В.А.Ильина были развиты А.С.Макиным на случай несамосопряженного возмущения самосопряженной периодической задачи. Оператор в работе А.С.Макина изменялся за счет возмущения одного из краевых условий.

В настоящей работе рассматриваемый оператор является несамосопряженным возмущением самосопряженной антипериодической задачи. В отличие от работы А.С.Макина здесь возмущение происходит за счет изменения уравнения и краевые условия являются антипериодическими. Построен характеристический определитель рассматриваемой спектральной задачи, который является целой аналитической функцией. Доказаны тео-

ремы об устойчивости и неустойчивости свойства базисности систем собственных функций.

Ключевые слова. характеристический определитель, базис Рисса, нагруженный оператор, антипериодические краевые условия, регулярные, неусиленно регулярные, возмущение.

Nurlan S. Imanbaev, On a problem that does not have basis property of root vectors associated with a perturbed regular operator of multiple differentiation, *J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.*, 2020, Volume 13, Issue 5, 568–573

DOI: https://doi.org/10.17516/1997-1397-2020-13-5-568-573

DOI: 10.17516/1997-1397-2020-13-5-568-573
УДК 517.9

On a Problem that Does not Have Basis Property of Root Vectors, Associated with a Perturbed Regular Operator of Multiple Differentiation

Nurlan S. Imanbaev*
South Kazakhstan State Pedagogical University
Shymkent, Kazakhstan
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling
Almaty, Kazakhstan

Received 18.05.2020, received in revised form 30.06.2020, accepted 04.07.2020

Abstract. A spectral problem for a multiple differentiation operator with integral perturbation of boundary value conditions which are regular but not strongly regular is considered in the paper. The feature of the problem is the absence of the basis property of the system of root vectors. A characteristic determinant of the spectral problem is constructed. It is shown that absence of the basis property of the system of root functions of the problem is unstable with respect to the integral perturbation of the boundary value condition.

Keywords: multiple differentiation operator, integral perturbation of boundary value conditions, basis property, root vectors, system of eigenfunctions and associated functions, eigenvalue, characteristic determinant.

Citation: N.S. Imanbaev, On a Problem that Does not Have Basis Property of Root Vectors, Associated with a Perturbed Regular Operator of Multiple Differentiation, J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys., 2020, 13(5), 568–573. DOI: 10.17516/1997-1397-2020-13-5-568-573.

1. Introduction and formulation of the problem

It is well known that a system of eigenfunctions of an operator defined by a formally self-adjoint differential expression with arbitrary self-adjoint boundary value conditions, that provide a discrete spectrum, forms an orthonormal basis in the space L_2. The problem of preservation of basis properties with respect to some weak (in a certain sense) perturbation of the initial operator was investigated in many papers. For example, the problem was studied in the case of a self-adjoint initial operator [1–3], and in the case of a non self-adjoint initial operator [4–6]. The following spectral problem is considered in this paper (it is close to the problems considered in [1, 4, 7])

$$l(u) \equiv -u''(x) = \lambda u(x), \quad 0 < x < 1 \tag{1}$$

$$U_1(u) \equiv u'(0) - u'(1) - \alpha u(1) = 0, \quad \alpha > 0, \tag{2}$$

$$U_2(u) \equiv u(0) = \int_0^1 \overline{p(x)} u(x) dx, \quad p(x) \in L_2(0,1). \tag{3}$$

*imanbaevnur@mail.ru https://orcid.org/0000-0002-5220-9899

Where λ is an arbitrary complex number. Stability of the basis property of root vectors of the spectral problem has was studied in the case $\alpha = 0$ [8]. It is common knowledge that system of root functions of an ordinary differential operator with arbitrary strongly regular boundary value conditions forms Riesz basis in the space $L_2(0,1)$. In the case when boundary value conditions are regular but not strongly regular, the basis property of systems of root functions, in contrast to the completeness property, is not even determined by the specific type of boundary value conditions. This effect was first established by V. A. Il'in [5], and the corresponding example was constructed for some second-order differential operator. In this case it was shown that not only boundary value conditions but also the values of coefficients of the differential operator affect the existence of the basis property. Moreover, this property can be changed with an arbitrarily small change in values of the coefficients in the metric of those classes in which these coefficients are given. Let L_1 be an operator in $L_2(0,1)$. It is defined by (1) and "perturbed" boundary value conditions

$$U_1(u) \equiv u'(0) - u'(1) - \alpha u(1) = 0, \quad \alpha > 0, \quad U_2(u) \equiv u(0) = \int_0^1 \overline{p(x)} u(x) dx, \quad p(x) \in L_2(0,1).$$

Unperturbed operator (the case $p(x) = 0$) is denoted by L_0. Various variants of the integral perturbation of boundary value conditions were considered [9–13]. It was assumed that unperturbed operator L_0 has a system of eigenfunctions and associated functions (E&AF) that forms the Riesz basis in $L_2(0,1)$. Characteristic determinant of the spectral problem for operator L_1 was also constructed. Then inferences were drawn about stability or instability of the Riesz basis property of the E&AF problem with an integral perturbation of the boundary value condition.

The distinctive feature of this paper is that system of eigenfunctions of unperturbed problem (1)– (3) is complete but it does not form a basis in $L_2(0,1)$ [14]. Therefore, the method that we use in the previous papers cannot be applied in this case.

2. Characteristic determinant of the spectral problem

Boundary value conditions in problem (1)–(3) are regular but not strongly regular [15]. System of root functions of operator l is a complete system but does not even form a usual basis in $L_2(0,1)$ [14]. However, as it was shown in [16], a basis can be constructed with the use of these eigenfunctions. This makes it possible to apply the method of separation of variables to solve the initial-boundary value problem with boundary value condition (2). The problem that does not have the basis property of root vectors in $L_2(0,1)$ defined by expression (1) with integral perturbation of boundary value condition (2) is studied [17]. The general solution of equation (1) has the form

$$u(x,\lambda) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x.$$

Using boundary value conditions (2)–(3), we obtain the following linear system with respect to coefficients C_k :

$$\begin{cases} C_1\left(\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} - \alpha\cos\sqrt{\lambda}\right) + \left(\sqrt{\lambda}\left(1-\cos\sqrt{\lambda}\right) - \alpha\sin\sqrt{\lambda}\right) = 0, \\ C_1\left(1 - \int_0^1 \overline{p(x)}\cos\sqrt{\lambda}x dx\right) + C_2\int_0^1 \overline{p(x)}\sin\sqrt{\lambda}x dx = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Therefore, characteristic determinant of problem (1)–(3) has the form

$$\Delta_1(\lambda) = \left(\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} - \alpha\cos\sqrt{\lambda}\right)\cdot\int_0^1 \overline{p(x)}\sin\sqrt{\lambda}x dx -$$
$$-\left(\sqrt{\lambda}\left(1-\cos\sqrt{\lambda}\right) - \alpha\sin\sqrt{\lambda}\right)\left(1-\int_0^1 \overline{p(x)}\cos\sqrt{\lambda}x dx\right). \quad (5)$$

If $p(x) = 0$ then the characteristic determinant of unperturbed problem (1)–(3) is obtained. It is denoted by

$$\Delta_0(\lambda) = \sqrt{\lambda}\left(1-\cos\sqrt{\lambda}\right) - \alpha\sin\sqrt{\lambda}.$$

Solving the equation $\Delta_0(\lambda) = 0$, we have two series of eigenvalues $\lambda_k^{(1)} = (2\pi k)^2$, $k = 1, 2, \ldots$, $\lambda_k^{(2)} = (2\beta_k)^2$, $k = 1, 2, \ldots$, of unperturbed problem (1)–(3). Here β_k are roots of the equation

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\alpha}{2\beta}, \quad \beta > 0. \quad (6)$$

They are positive and satisfy the following inequalities:
$\pi k < \beta_k < \pi k + \frac{\pi}{2}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.
For the difference $\delta_k = \beta_k - \pi k$ at large enough k the following two-sided estimates are true

$$\frac{\alpha}{2\pi k}\left(1-\frac{1}{2\pi k}\right) < \delta_k < \frac{\alpha}{2\pi k}\left(1+\frac{1}{2\pi k}\right). \quad (7)$$

When $p(x) = 0$ eigenfunctions of the unperturbed problem have the following form

$$u_k^{(1)}(x) = \sin(2\pi k x), \quad k = 1, 2, \ldots, \quad u_k^{(2)}(x) = \sin(2\beta_k x), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

When $p(x) = 0$ let us consider the problem adjoint to unperturbed problem (1)–(3)

$$l*(\nu) = \overline{\lambda}\nu, v'(1) + \alpha v(0) = 0; \quad v(0) - v(1) = 0 \quad (8)$$

It has eigenfunctions

$$v_k^{(1)}(x) = C_k^{(1)}\left(\cos(2\pi k x) - \frac{\alpha}{2\pi k}\sin(2\pi k x)\right), \quad k = 1, 2, \ldots,$$
$$v_k^{(2)}(x) = C_k^{(2)}\left(\cos(2\beta_k x) + \frac{\alpha}{2\beta_k}\sin(2\beta_k x)\right), \quad k = 1, 2, \ldots,$$

where $C_k^{(1)}, C_k^{(2)}$ are selected from the ratio of biorthogonality $\left(u_k^{(1)}, v_k^{(1)}\right) = 1$, $\left(u_k^{(2)}, v_k^{(2)}\right) = 1$. Hence,

$$C_k^{(1)} = -\frac{4\pi}{\alpha}, \quad C_k^{(2)} = \frac{4\pi}{\alpha} + O\left(\frac{1}{k}\right). \quad (9)$$

An auxiliary system was constructed that forms the basis in $L_2(0,1)$ [16]

$$u_0(x) = u_0^{(2)}(x)\cdot(2\beta_0)^{-1}, \quad u_{2k}(x) = u_k^{(1)}(x),$$
$$u_{2k-1}(x) = \left(u_k^{(2)}(x) - u_k^{(1)}(x)\right)\cdot(2\delta_k)^{-1}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

The system that is biorthogonal to auxiliary system is

$$v_0(x) = 2\beta_0 v_0^{(2)}(x), \quad v_{2k}(x) = v_k^{(2)}(x) + v_k^{(1)}(x), \quad v_{2k-1}(x) = 2\delta_k v_k^{(2)}(x), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

It is constructed from the eigenfunctions of problem (8). The function $p(x)$ can be represented in terms of Fourier series based on the auxiliary system $\{v_k(x)\}$:

$$p(x) = a_0 v_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k v_{2k}(x) + b_k v_{2k-1}(x)). \tag{10}$$

We integrate expression (5) and obtain

$$\int_0^1 \overline{p(x)} \sin\sqrt{\lambda} x dx = \Delta_0(\lambda) \cdot \left\{ \bar{a}_0 \cdot C_0^{(2)} \frac{2\beta_0}{\lambda - (2\beta_0)^2} + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{a}_k \cdot C_k^{(1)} \frac{1}{\lambda - (2k\pi)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k^{(2)}}{\lambda - (2\beta_k)^2} \left(\bar{a}_k + \bar{b}_k (2\delta_k)\right) \right\},$$

where

$$\Delta_0(\lambda) = \sqrt{\lambda}\left(1 - \cos\sqrt{\lambda}\right) - \alpha \sin\sqrt{\lambda};$$

$$\int_0^1 \overline{p(x)} \cos\sqrt{\lambda} x dx = \bar{a}_0 \frac{(2\beta_0) \cdot C_0^{(2)}}{\lambda - (2\beta_0)^2} \left(\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} - \alpha\cos\sqrt{\lambda}\right) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \bar{a}_k \frac{C_k^{(1)}}{\lambda - (2k\pi)^2} \left(\alpha\left(1 - \cos\sqrt{\lambda}\right) + \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\right) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\bar{a}_k + \bar{b}_k(2\delta_k)\right) \frac{C_k^{(2)}}{\lambda - (2\beta_k)^2} \left(\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} - \alpha\cos\sqrt{\lambda} - \alpha\right).$$

Using obtained results, determinant (5) is reduced to the form

$$\Delta_1(\lambda) = \Delta_0(\lambda) \left[-1 + \alpha \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \left(C_k^{(1)} \frac{1}{\lambda - (2k\pi)^2} - C_k^{(2)} \frac{1}{\lambda - (2\beta_k)^2} \right) - \right.\right.$$
$$- b_k \frac{2\delta_k C_k^{(2)}}{\lambda - (2\beta_k)^2} \Bigg) + 2\left(\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} - \alpha\cos\sqrt{\lambda}\right) \cdot \left(a_0 \frac{(2\beta_0) \cdot C_0^{(2)}}{\lambda - (2\beta_0)^2} + \right.$$
$$\left.\left. + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \left(C_k^{(1)} \frac{1}{\lambda - (2k\pi)^2} + C_k^{(2)} \frac{1}{\lambda - (2\beta_k)^2} \right) + b_k \frac{(2\delta_k) C_k^{(2)}}{\lambda - (2\beta_k)^2} \right) \right) \right], \tag{11}$$

where $\Delta_0(\lambda) = \sqrt{\lambda}\left(1 - \cos\sqrt{\lambda}\right) - \alpha\sin\sqrt{\lambda}$.

Expression in square brackets is denoted by $A(\lambda)$. The obtained above result is formulated as the following theorem.

Theorem 2.1 *Characteristic determinant of spectral problem* (1)–(3) *with perturbed boundary value conditions can be represented in form* (11), *where* $\Delta_0(\lambda)$ *is the characteristic determinant of the unperturbed problem, and* a_k, b_k *are the Fourier coefficients of expansion* (10) *of the function* $p(x)$ *in the biorthogonal system of eigenfunctions of adjoint problem* (8).

Function $A(\lambda)$ with $\lambda = (2\beta_k)^2$ and $\lambda = (2\pi k)^2$ has first order poles. Therefore, $\Delta_1(\lambda) = \Delta_0(\lambda) \cdot A(\lambda)$ is an entire analytic function of the variable λ. Characteristic determinant (11)

has the simple form when $p(x)$ is represented as a finite sum in (10). When there exists a number N such that $a_k = b_k = 0$ for all $k > N$ then function $A(\lambda)$ has the form

$$A(\lambda) = -1 + \alpha \sum_{k=1}^{N} \left[a_k \left(C_k^{(1)} \frac{1}{\lambda - (2k\pi)^2} - C_k^{(2)} \frac{1}{\lambda - (2\beta_k)^2} \right) - \right.$$
$$\left. - b_k \frac{2\delta_k C_k^{(2)}}{\lambda - (2\beta_k)^2} \right] + 2\left(\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} - \alpha\cos\sqrt{\lambda}\right) \cdot \left(a_0 \frac{(2\beta_0) \cdot C_0^{(2)}}{\lambda - (2\beta_0)^2} + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{N} \left[a_k \left(C_k^{(1)} \frac{1}{\lambda - (2k\pi)^2} + C_k^{(2)} \frac{1}{\lambda - (2\beta_k)^2} \right) + b_k \frac{(2\delta_k) C_k^{(2)}}{\lambda - (2\beta_k)^2} \right] \right. . \quad (12)$$

It follows from (12) that $\Delta_1(\lambda_k^1) = \Delta_1(\lambda_k^2) = 0$, for all $k > N$. Consequently, all eigenvalues λ_k^1, λ_k^2, $k > N$ of unperturbed problem (1)–(3) ($p(x) = 0$) are eigenvalues of perturbed problem (1)–(3). Multiplicity of eigenvalues λ_k^1, λ_k^2, $k > N$ is preserved. It follows from the condition of biorthogonality of the system of eigenfunctions $\left\{u_k^{(1)}(x),\ u_k^{(2)}(x)\right\}$ and $\left\{v_k^{(1)}(x),\ v_k^{(2)}(x)\right\}$ that $\int_0^1 \overline{p(x)} u_k^{(1)}(x)dx = 0$, $\int_0^1 \overline{p(x)} u_k^{(2)}(x)dx = 0$, $k > N$. Thus, eigenfunctions $\left\{u_k^{(1)}(x),\ u_k^{(2)}(x)\right\}$, $k > N$ of unperturbed problem ($p(x) = 0$) (1)–(3) satisfy the boundary value conditions of perturbed problem (1)–(3). Therefore, the system of eigenfunctions of perturbed problem (1)–(3) and the system of eigenfunctions of the unperturbed problem ($p(x) = 0$) coincide which do not form a basis with the exception of a finite number of the first terms. Then the system of eigenfunctions of perturbed problem (1)–(3) is also not a basis in $L_2(0,1)$ in this particular case.

References

[1] A.S.Makin, *Differential Equations*, **42**(2006), no. 4, 599–602.
DOI: 10.1134/S0012266106040185

[2] A.S.Markus, On decomposition of a weakly perturbedself-adjoint operator by root vectors, *Reports of the AS USSR*, **142**(1962), no. 3, 538–541 (in Russian).

[3] N.B.Kerimov, Kh.R.Mamedov, On the Riesz basis property of root functions of some regular boundary value problems, *Math. Notes.*, **64**(1998), 483–487.

[4] A.A.Shkalikov, On basis property of eigenfunctions of ordinary differential operators with integral boundary value conditions, *Vestnik MGU*, (1982), no. 6, 12-21 (in Russian).

[5] V.A.Ilyin, L.V.Kritskov, *Journal of Mathematical Sciences*, **116**(2003), 3489–3550.
DOI: 10.1023/A:1024180807502

[6] N.S.Imanbaev, M.A.Sadybekov, Basis properties of root functions of loaded differential operators of the second order, *Reports of the NAS RK*, (2010), no. 2, 11–13 (in Russian).

[7] N.S.Imanbaev, M.A. Sadybekov, Stability of basis property of a type of problems with nonlocal perturbation of boundary conditions, AIP Conf. Proc., Vol. 1759, ICAAM, 2016, 020034–020039.

[8] N.S.Imanbaev, *International Journal of Differential Equations*, **2015**(2015), Article ID 641481. DOI: 10.1155/2015/641481

[9] N.S.Imanbaev, M.A. Sadybekov, On instability of basis property of root vectors system of the double differentiation operator with an integral perturbation of periodic type conditions, *AIP Publishing: Advancements in Mathematical Sciences*, **1676**(2015), 020083–020088.

[10] M.A.Sadybekov, N.S.Imanbaev, *Differential Equations*, **48**(2012), no. 6, 896–900. DOI: 10.1134/S0012266112060146

[11] M.A. Sadybekov, N.S.Imanbaev, On spectral properties of a periodic problem with an integral perturbation of the boundary condition, *Eurasian Mathematical Journal*, 4(2013), no. 3, 53–62.

[12] N.S.Imanbaev, Stability of the basis property of eigenvalue systems of Sturm-Liouville operators with integral boundary condition, *ElectronicJournal of Differential Equations*, **2016**(2016), no. 87, 1–8.

[13] M.A.Sadybekov, N.S.Imanbaev, Regular differential operator with a perturbed boundary condition, *Mathematical Notes*, **101**(2017), no. 5, 878–887.

[14] P.Lang, J.Locker, Spectral theory of two-point differential operators determined by -D2, *Journal Math. Anal.Appl.*, **146**(1990), no. 1, 148–191.

[15] M.A.Naimark, Linear Differential Operators, George G. Harrap & Company, London, 1967.

[16] A.Yu.Mokin, *Differential equations*, **45**(2009), no. 1, 123–137. DOI: 10.1134/S0012266109010133

[17] M.A.Sadybekov, N.S.Imanbaev, Characteristic determinant of a boundary value problem, which does not have the basis property, *Eurasian Math. J.*, **8**(2017), no. 2, 40–46.

Об одной задаче, не обладающей свойством базисности корневых векторов, связанной с возмущенным регулярным оператором кратного дифференцирования

Нурлан С. Иманбаев
Южно-Казахстанский государственный педагогический университет
Чимкент, Казахстан
Институт математики и математического моделирования
Алма-Ата, Казахстан

Аннотация. В работе рассматривается спектральная задача для оператора кратного дифференцирования при интегральном возмущении краевых условий одного типа, являющихся регулярными, но не усиленно регулярными, где особенностью задачи считают отсутствие свойства базисности у системы корневых векторов. Построен характеристический определитель спектральной задачи. Показано, что отсутствие базисности у системы корневых функций задачи неустойчиво относительно интегрального возмущения краевого условия.

Ключевые слова: оператор кратного дифференцирования, интегральное возмущение краевых условий, базисность, корневые векторы, система собственных и присоединенных функций, собственное значение, характеристический определитель.

NEWS
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 4. Number 338 (2021), 143 – 150 https://doi.org/10.32014/2021.2518-1726.76

UDC 517.945
IRSTI 27.29.15; 27.29.17; 27.41.19

Imanbaev N.S.[1,2]

[1]South Kazakhstan State Pedagogical University, Shymkent, Kazakhstan;
[2]Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan.
E-mail: imanbaevnur@mail.ru

ON A TOPOLOGICAL METHOD FOR CALCULATING THE INDEX OF QUASI-SINGULAR INTEGRAL EQUATION

Abstract: a reduced spectral problem is considered for an elliptic type operator, in particular, for the Cauchy - Riemann operator with regular boundary value conditions to a quasi-singular integral equation with continuous kernel. Structure of the kernel of the quasi-singular integral equation is studied in explicit form. Index is calculated and condition for Noetherity of the investigated quasi-singular integral equation is established by the topological method on the complex plane. In this case, the spectral parameters are described under which the nonhomogeneous boundary value problem with shift for the Cauchy-Riemann equations is solvable everywhere in the class of continuous functions on the unit circle. The given problem is a nonlocal nature, and similar problems for the Cauchy-Riemann operation are described by M. Otelbaev in 1982. The solution of some singular integral equations with kernels depending on the difference and the sum of the arguments were studied in the works of I.I.Kalmushevsky. This interest is explained both by the theoretical significance of the results obtained and by the possibilities of important applications. Similar boundary value problems arise in the mathematical modeling of gas dynamics problems, soil moisture prediction, radiation transfer, population genetics, etc. The simplest examples of these boundary conditions were formulated by V.A. Steklov 1922. In this paper, the fundamental difference from the above work is the topological approach to calculating the index and establishing the Noether condition on the complexs plane.

Key words: quasi-singular integral equation, noetherity, index, continuous kernel, affix, arc interval, argument increment.

Introduction. Boundary value conditions, which are relations between the values of sought-for functions calculated at various (variable) points lying on the boundary or inside the considered region, arising in thermal conductivity, were formulated by V.A. Steklov [1] and in gas dynamics by F.I. Frankl [2]. A.M.Nakhushev [3, 5] posed and studied several problems of this type at once, and for their name, the term "with shift" was proposed. In the work of A.V. Bitsadze and A.A. Samarskiy [4], the problem "with shift within the region" was first studied.Content of recent publications has led to realization of qualitative novelty of boundary value problems with shift for the theory of partial differential equations. In [5] state of boundary value problems with shiftwas investigated for main types of partial differential equations.General publications, where more and more general situations are studied, sometimes make an impression that the theory of boundary value problems "with shift" is completed. However, there are a number of less studied, but important questions, in particular, the problem of eigenvalues or their analytical description by using, for example, asymptotic expansions. The applied methods of functional analysis and reduction to model equations with help of integral transformations are insufficient to obtain facts in particular. However, it is not always possible to obtain a solution, for example, for spectral problems for partial differential equations in explicit form, as it was done in the analytical situation for ordinary differential equations [6-9]. Generality of the above questions for partial differential equations forces us to impose a number of very strict restrictions on thestudied operators. To clarify the correct statements of problems and study the specific properties of solutions for "non-classical" equations it is convenient to begin by considering idealized models, for example, by considering equations with constant coefficients. For higher-order partial differential equations in two or three variables, the Dirichlet problem in rectangular domains is studied. Small denominators hampering the convergence of series appear in the process of constructing the solution of the problem by the spectral decomposition method [10]. In connection with the foregoing, we note

description of general regular boundary value problems for the Cauchy-Riemann differential expression, developed by M. Otelbaev and A.N. Shynybekov in 1982 [11]. The most profound results on studying the spectrum of elliptic operators are available in [12]. In the general case, the spectrum of an elliptic operator is essentially determined by the spectral properties of boundary operator. However, identification of dependence of the spectrum of the Cauchy-Riemann operator in initial terms of the boundary conditions represents an actual (unsolved) problem [13]. Note one of the last works [14], where we established conditions quarantining the possibility of reduction of a natural analog of the typical boundary value problem of the Cauchy - Riemann system. The Riemann - Hilbert problem for a holomorphic vector in multidimensional domain is reduced to the integral Fredholm equation. In the papers [15, 16], the index is calculated and condition for the Noether property of a singular integral equation with a continuous kernel is established. Eigenvalue problems of the Cauchy-Riemann differential operator with regular boundary value conditions, in particular with nonlocal boundary value conditions [11], as well as with Dirichlet type homogeneous boundary value conditions [17, 18], where the initial operator is proved to be Volterre, are reduced to the similar problem. The theory of singular integral equations is deeply studied in [19-22].

Materials and methods. Methods of reduction of boundary value problems to singular integral equations and a topological method to calculating the index are used, as well as establishing the condition for the Noetherity of a singular integral equation on the complex plane.

Discussion. Consider the following quasi-singular integral equation for the function $u(z)$ on $|z| = 1$ of the complex plane:

$$a(z)u(z) - \frac{b(z)}{\pi i}\oint_{|t|=1}\frac{u(t)}{t-z}dt + \oint_{|t|=1}T(z,t)u(t)dt = 0, \qquad (1)$$

where $a(z) = \frac{1}{2}(\lambda e^{\lambda\bar{z}} + \bar{\lambda}e^{\bar{\lambda}z})$, $b(z) = e^{\lambda\bar{z}} - e^{\bar{\lambda}z}$,

$$T(z,t) = \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{t}\left[e^{\lambda\bar{z}} - e^{\bar{\lambda}z} - \lambda - \bar{\lambda} + \frac{1}{t-z}(\lambda t e^{\lambda\bar{t}} - \bar{\lambda} z e^{\bar{\lambda}z}) - \frac{1}{2}\frac{t+z}{t-z}(\lambda e^{\lambda\bar{z}} - \bar{\lambda}e^{\bar{\lambda}z})\right] +$$

$$+\frac{i}{4\pi(1-Re\lambda)}\left[-e^{\lambda\bar{z}} + e^{\bar{\lambda}z} + \frac{\bar{\lambda}}{2}e^{\bar{\lambda}z} - \frac{\lambda}{2}e^{\lambda\bar{z}} + \lambda - \bar{\lambda}\right]\cdot\frac{1}{t}(\bar{\lambda}e^{\bar{\lambda}t} - \lambda e^{\lambda\bar{t}} + \lambda - \bar{\lambda})$$

is a continuous kernel, bar means complex conjugation, $i = \sqrt{-1}$ is an imaginary unit, which is directly related to spectral questions of the Cauchy -Riemann differential operator. The main goal of this paper is to calculate the index and establish the Noetheric condition for the quasi-singular integral equation (1).

In the quasi-singular integral equation (1): $a(z,\lambda) = \frac{1}{2}(\lambda e^{\lambda\bar{z}} + \bar{\lambda}e^{\bar{\lambda}z})$,

$b(z,\lambda) = e^{\lambda\bar{z}} - e^{\bar{\lambda}z}$.

The Noetherian property of an equation is determined [20, 21] by the inequalities $a(z,\lambda) \neq 0$ or $b(z,\lambda) \neq 0$ for all $|z| = 1$.

Consequently, the noetherityis violated when

$$\left.\begin{aligned}\lambda e^{\lambda\bar{z}} + \bar{\lambda}e^{\bar{\lambda}z} = 0\\ e^{\lambda\bar{z}} - e^{\bar{\lambda}z} = 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda + \bar{\lambda} = 0.$$

Therefore, the noetherity is guaranteed at $\lambda \neq -\bar{\lambda}$, then $Re\lambda \neq 0$. The following theorem gives the index value determined by the formula [19-21]:

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi i}\left[ln\frac{a(z)+b(z)}{a(z)-b(z)}\right]_{|z|=1},$$

where $[\cdot]_{|z|=1}$ means increment of the function enclosed in the square brackets when traversing the unit circle in the positive direction.

Results. Theorem. The quasi-singular integral equation (1) for $u(t)$ is Noetherian when $Re\lambda \neq 0$. Moreover, Noetherian index

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi i}[\ln(a(z)+b(z))]_{|z|=1}$$

is zero at $Re\lambda \neq 0$.

Proof. Since expressions $a(z)+b(z)$ and $a(z)-b(z)$ are complex conjugate, the index $\aleph$ is expressed in the following form

$$\aleph = \frac{1}{\pi}\Delta_{|z|=1}Arg(a(z)+b(z)),$$

where $\Delta_{\tilde{A}} Arg\, f$ is the increment of $Arg\, f$ around $\tilde{A}$ running in the positive direction. It is known [23]. $Arg(a(z)+b(z)) = arctg \dfrac{b(z)}{ia(z)} (\bmod \pi)$. Here it is taken into account that $b(z)$ is a pure imaginary function, and $a(z)$ is a real one. Let the circle $\tilde{A} = \{z : |z| = 1\}$ be bypassed against-clockwise. Let's find zeros of the function

$$b(z) : e^{\lambda \bar{z}} - e^{\bar{\lambda} z} = 0 \Rightarrow e^{\lambda \bar{z} - \bar{\lambda} z} = 1,$$

$$\lambda \bar{z} - \bar{\lambda} z = 2k\pi i, k \in Z \Rightarrow \operatorname{Im} \lambda \bar{z} = k\pi$$

at $|z| = 1$.

So, zeros of the function $b(z)$ are defined by the solution of the equation

$$\operatorname{Im} \lambda \bar{z} = k\pi \ at \ |z| = 1, \quad k \in Z. \qquad (2)$$

Here λ plays the role of the parameter. Consider a topological method, i.e. q geometric wayof solving the equation (2). Note by K on the complex plane the point with the affix λ. Draw the unit circle $|z| = 1$. Take arbitrary z, $|z| = 1$. Drop the perpendicular DO to the direct $OK : DO \perp OK$. $\Delta ABO = \Delta COD$, $DO = BO = \operatorname{Im} \lambda \bar{z}$.

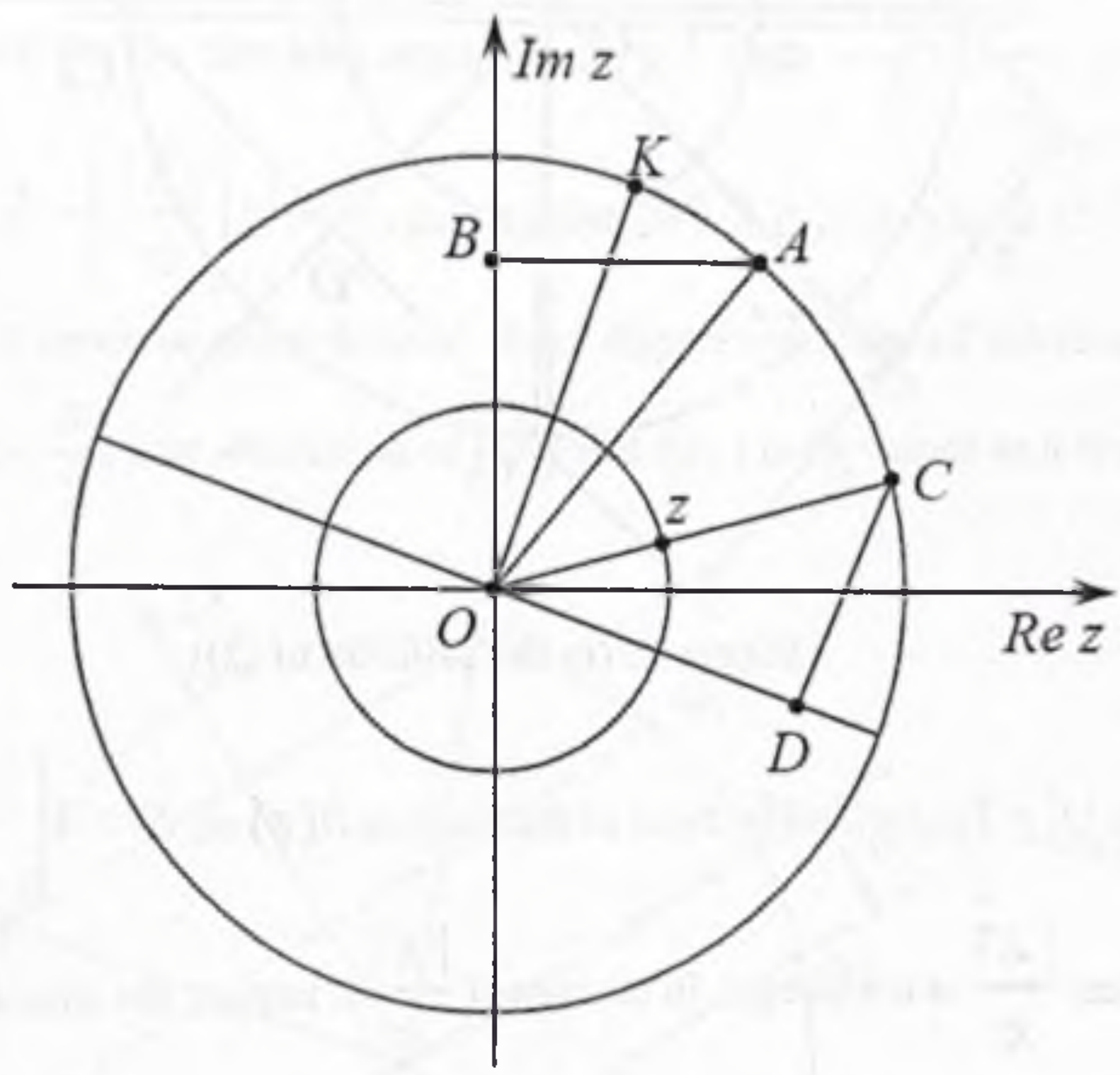


Figure 1: (to the geometric interpretation)

Thus, to define $\operatorname{Im} \lambda \bar{z}$, it is sufficient to find *DO*. Take $z_1 = \dfrac{\lambda}{|\lambda|}$ as a first solution of (2). It is evident, $\operatorname{Im} \lambda \bar{z}_1 = 0$, i.e. (2) is satisfied at $k = 0$. To find other solutions of (2), drop the perpendicular to the ray through h_λ. Draw straight lines parallel to the ray λ, distant from each other on the distance π, moreover one of the straight lines passes through the origin of coordinates. Find the intersection points of constructed straight lines with the circle of the radius $|\lambda|$, which are defined by the amount of integer k satisfying to the inequality $|k| < \dfrac{|\lambda|}{\pi}$. Hence, amount of the straight lines is equal to $2\left[\dfrac{|\lambda|}{\pi}\right] + 1$ where $\left[\dfrac{|\lambda|}{\pi}\right]$ is the integer part of the number $\dfrac{|\lambda|}{\pi}$. When $\dfrac{|\lambda|}{\pi}$ is not natural, the number of such intersection points will be $S = 4\left[\dfrac{|\lambda|}{\pi}\right] + 2$

, i.e. each straight line intersects the circle in two points. Denote by C_1 one of these points that corresponds to the first solution z_1 of (2). In particular, it coincides with λ. Renumber other intersection points such that increasing of their numbers correspond to their location on the circle in the direction against-clockwise. So, we have C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6. Denote by z_j the point of the complex plane that is equal to the unit by the module and coincides with the point C_j, i.e. $z_j = \frac{\overrightarrow{OC_j}}{|OC_j|}$ (Fig.2).

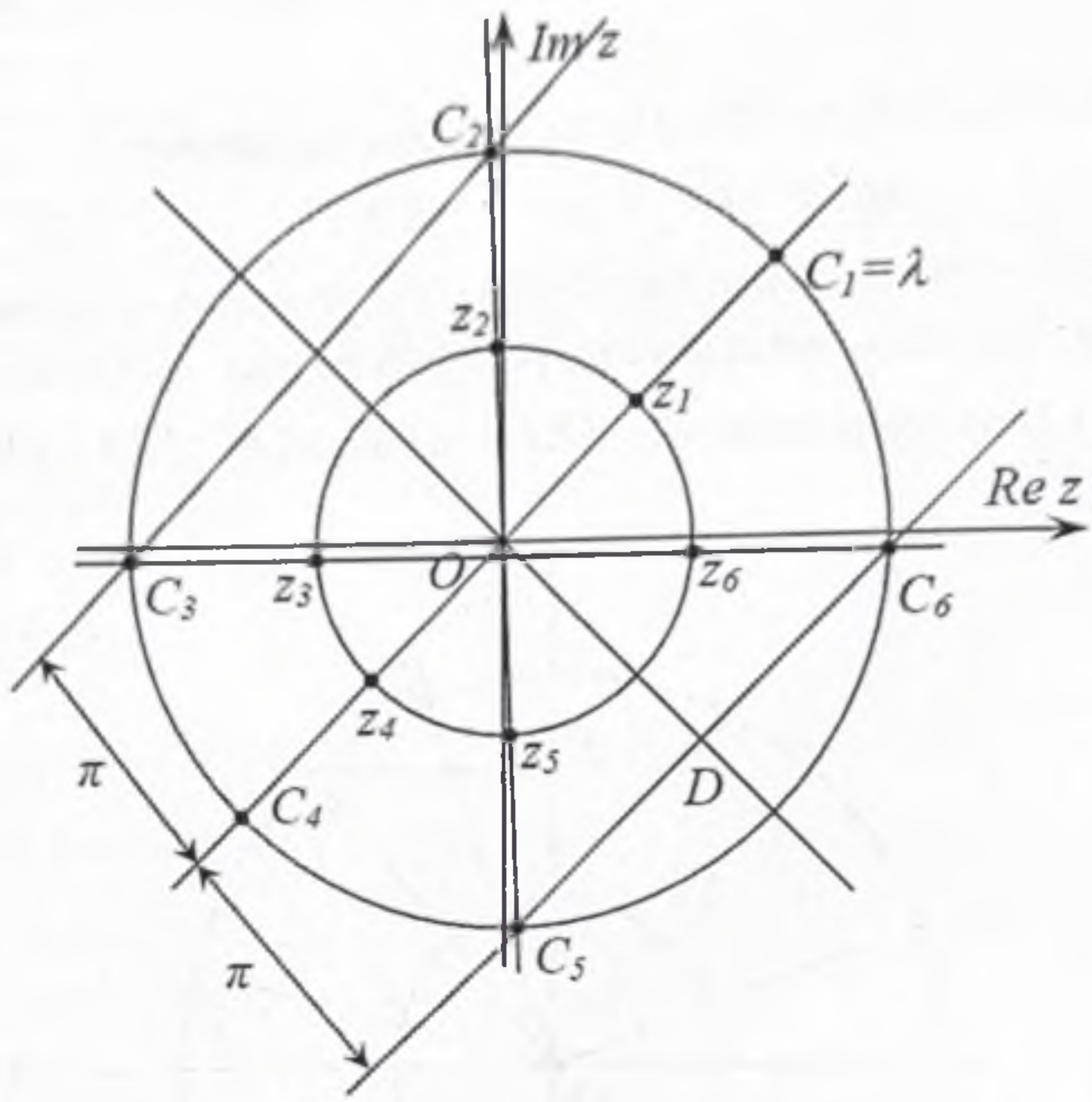


Figure 2: (to the solution of (2))

Thus, the unit circle $|z| = 1$ is divided by zeros of the function $b(z)$ on $S = 4\left[\frac{|\lambda|}{\pi}\right] + 2$ parts with points z_1, z_2, z_3, ..., z_5 when $\frac{|\lambda|}{\pi}$ is not integer. In the case of $\frac{|\lambda|}{\pi}$ is integer, the amount of points $S = 4\left[\frac{|\lambda|}{\pi}\right]$. Now passto determination of zeros of the function $a(z)$.

$$\lambda e^{\lambda \bar{z}} + \bar{\lambda} e^{\bar{\lambda} z} = 0, \ |z| = 1.$$

We obtain after not complicated transformations $e^{\lambda \bar{z} - \bar{\lambda} z} = -\frac{\bar{\lambda}}{\lambda}$, what implies immediately

$$\operatorname{Im} \lambda \bar{z} = k\pi + \frac{\pi}{2} - Arg\,\lambda, k \in Z. \qquad (3)$$

The equation (3) is solving analogously to the equation (2). Renumber the solutions of (3) ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, ω_5, ω_6, disposing them on the unit circle $|z| = 1$ against-clockwise. The numbers $\{\omega_j\}$ will coincide with the set $\{z_j\}$, $\{\omega_j\}$ will be different and almost all of them will alternate on the unit circle. Now we cite

a few words concerning the number of solutions of (3). It coincides with the doubled amount of integer k satisfying to the inequality $\left| k\pi + \frac{\pi}{2} - Arg\,\lambda \right| \le |\lambda|$, i.e.

$$-|\lambda| \le k\pi + \frac{\pi}{2} - Arg\,\lambda \le |\lambda|,$$

$$Arg\,\lambda - \frac{\pi}{2} - |\lambda| \le k\pi \le |\lambda| + Arg\,\lambda - \frac{\pi}{2}.$$

k will be found from here in the form of the inequalities

$$\frac{Arg\,\lambda - \frac{\pi}{2} - |\lambda|}{\pi} \le k \le \frac{|\lambda| + Arg\,\lambda - \frac{\pi}{2}}{\pi}.$$

In the case when $\frac{Arg\,\lambda - \frac{\pi}{2} - |\lambda|}{\pi}$ and $\frac{|\lambda| + Arg\,\lambda - \frac{\pi}{2}}{\pi}$ are not integer. we denote by ρ the doubled number of integers falling into the interval between these non integer values. It should be noted. when the module of λ is constant. for the changing argument $Arg\lambda$ from $-\frac{\pi}{2}$ to $\frac{\pi}{2}$, ρ can changed from the corresponding S on 2. For $\lambda - \left[\frac{|\lambda|}{\pi}\right]\pi > \frac{\pi}{2}$, inequalities $S + 2 \ge \rho \ge S$ hold. If $\lambda - \left[\frac{\lambda}{\pi}\right]\pi < \frac{\pi}{2}$, then $S - 2 \le \rho \le S$. Now we describe more detailed about disposition order of solutions of equations (2) and (3). When $-\frac{\pi}{2} < Arg\lambda < \frac{\pi}{2}$, that alternation of $\{\omega_j\}$ and $\{z_j\}$ is happened as it is shown on the figure 3.

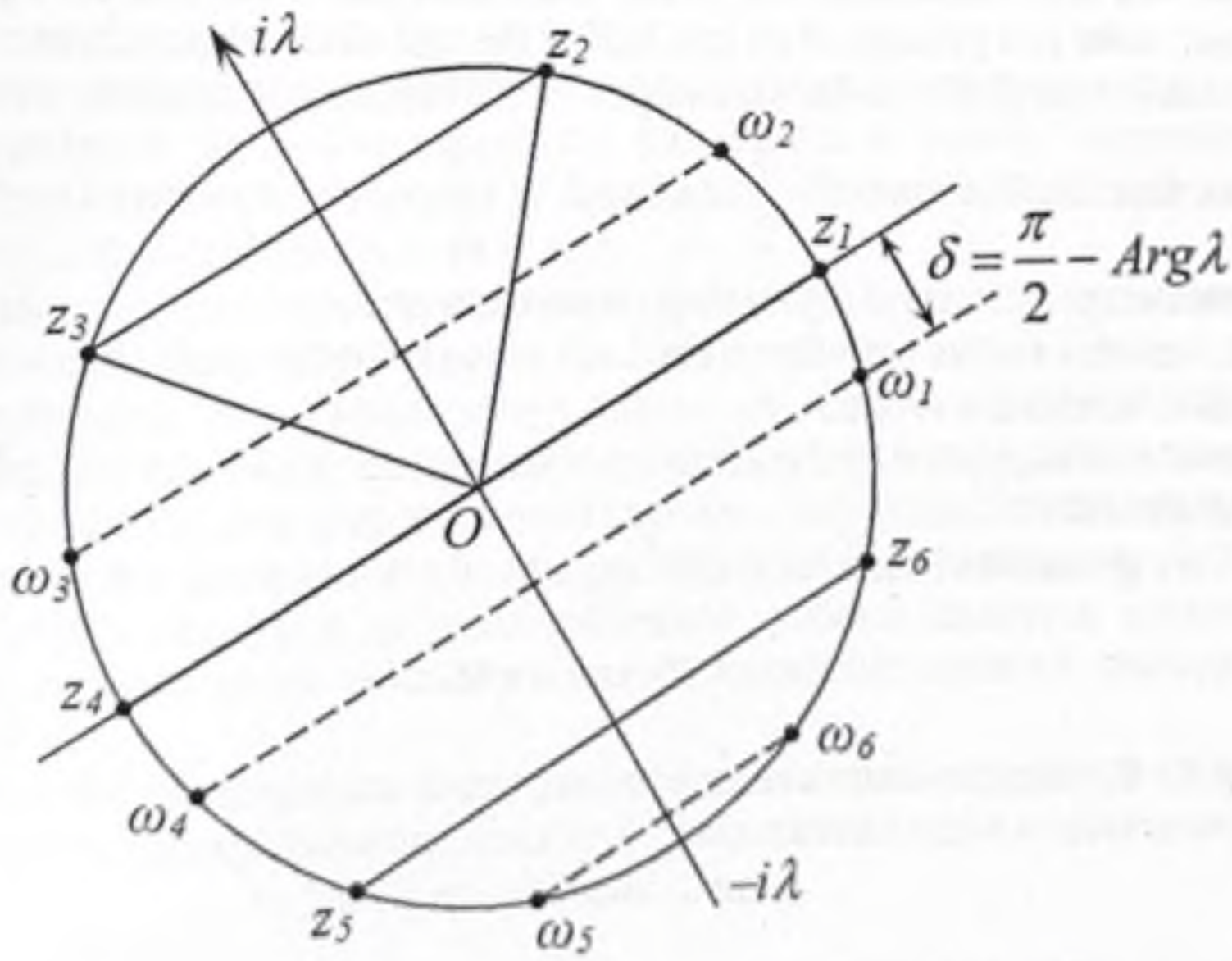


Figure3: (disposition of numbers $\{z_j\}$ and $\{\omega_j\}$)

On the figure 3, the point C_j corresponds to the number $\{z_j\}$, the point D_j corresponds to ω_j, and all $\{z_j\}$ and $\{\omega_j\}$ also alternate, except of the one pair z_j, z_{j+1} and ω_j, ω_{j+1} following immediately one after

another. Violation of alternating solutions of equations (5) and (6) arises on those arcs of the circle with the radius i, that contain the numbers $\frac{\pm i\lambda}{|\lambda|}$.

Thus, numbers $\frac{\pm i\lambda}{|\lambda|}$ are contained in an arc interval, the ends of which are either solutions of the equation (3), or solutions of (2). Analogous violation of alternating solutions of solutions arises at $\frac{\pi}{2} < Arg\lambda < \frac{3\pi}{2}$.

Taking into account, that all zeros of equations (2) and (3) are prime, for non integer $\frac{\lambda}{\pi}$, we can calculate exact values of the index $\aleph$. So, passing through the solution either $a(z)$, or $\left(-ib(z)\right)$ changes the sign on the opposite one. Begin registration of signs from the arc interval with the ends z_1 and ω_1. Suppose, the expression $\left(-ib(z)\right)$ has here the sign "+", and the function $a(z)$ has the sign " – ". Then the following pair-wise alternation of signs

$$\begin{array}{l} + + - - + + \ldots \\ - + + - - + \ldots \end{array} \qquad (4)$$

is kept until another arc interval with the point $-\frac{i\lambda}{|\lambda|}$ shall be occurred. Suppose that we enter in this interval with the pair of signs $\begin{matrix} + \\ + \end{matrix}$, then we obtain the same pare of signs which was at the entrance. In this connection, alternation of points $\{z_j\}$ and $\{\omega_j\}$ will be changed. If, at the entrance, a solution of (3) was the left end of the arc interval, then now, at the exit, a solution of (2) will be the left end. That's why the further alternation of signs will arise according to (4) only from the right to the left, i.e. by virtue of symmetry of disposition of zeros, under full passage of an one-half of the unit circle, argument increment will not arise.

Similarly arguments take place on the second part of the circle. It is obvious, initial choice of the pair of signs does not play the role. The case of $\frac{\pi}{2} < Arg\,\lambda < \frac{3\pi}{2}$ can be considered by the same way. Thus, the index $\aleph$ of the quasi-singular integral equation (1) is equal to zero.

Conclusion. In conclusion, we note that it has been proved that the quasi-singular integral equation (1) is Noetherian for which its index is to zero.

This work was supported by the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan under Grant № AP 09260752.

The author is very grateful to Professor B.E. Kanguzhin for his attention to the work.

Иманбаев Н.С.[1,2]

[1] Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік педагогикалық университеті, Шымкент, Қазақстан;
[2] Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы, Қазақстан.
E-mail: imanbaevnur@mail.ru

КВАЗИСИНГУЛЯРЛЫ ИНТЕГРАЛДЫҚ ТЕҢДЕУДІҢ ИНДЕКСІН ЕСЕПТЕУДІҢ ТОПОЛОГИЯЛЫҚ БІР ӘДІСІ ЖАЙЛЫ

Аннотация: бұл мақалада эллиптикалық типтегі оператордың спектралдық есебінің, атап айтқанда, регулярлы шеттік шарттармен берілген Коши-Риман амалынан туындайтын дифференциалдық оператордын меншікті мәндерін зерттеуге арналған есептің үзіліссіз ядролы квазисингулярлы интегралдық теңдеуге редукцияланған түріндегі есебі карастырылады.Квазисингулярлы интегралдық

теңдеудің ядросының құрылымы айқын түрде зерттелген. Зерттеліп отырған квазисингулярлы интегралдық теңдеудің комплексті жазықтықта топологиялық әдіспен индексі есептелінген және нетер шарты табылған. Бірлік дөңгелектегі үзіліссіз функциялардың кеңістігіндегі Коши-Риман теңдеуі үшін жылжыған біртекті емес шеттік есептің спектралдық параметрлері туралы мәліметтер сипатталған. Бұл қарастырылып отырған есеп,бейлокалды есептерге жатады және Коши-Риман амалынан туындайтын операторларға арналған есептердің қисындылығы 1982 ж. М. Өтелбаев пен оның шәкірттерінің еңбектерінде сипатталған болатын. Аргументтердің қосындысы мен айырмасынан тәуелді ядролы сингулярлық интегралдық теңдеудің шешімділігі туралы мәселелер И.И. Кальмушевскийдің жұмыстарында терең зерттелген.Алынатын нәтижелер теориялық тұрғыдан да қолданбалы тұрғысынан да түсіндіріледі. Аталмыш шекаралық шарттар газдар динамикасында, ылғалданған тамырларға болжам жасағанда, радиациялық көшіруде, популяциялық генетикада математикалық модельдеу жасағанда пайда болады. Ең қарапайым шеттік шарттардың мысалдары алғаш 1922 ж. В.А. Стеклов құрған болатын. Бұл жұмыстың жоғарыда келтірілген еңбектен түбегейлі ерекшелігі, қарастырылып отырған квазисингулярлы интегралдық теңдеудің индексін топологиялық әдіспен есептей отырып, нетер шартының құрылуында болып табылады.

Түйін сөздер: квазисингулярлы интегралдық теңдеу, нетерлік, индекс, үзіліссіз ядро, аффикс, доғалық интервал, аргументтің өсімшесі.

Иманбаев Н.С.[1,2]

[1] Южно-Казахстанский государственный педагогический университет, Шымкент, Казахстан;
[2] Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан.
E-mail:imanbaevnur@mail.ru

ОБ ОДНОМ ТОПОЛОГИЧЕСКОМ ПОДХОДЕ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ИНДЕКСА КВАЗИСИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Аннотация: рассматривается редуцированная спектральная задача для оператора эллиптического типа, в частности для оператора Коши-Римана с регулярными краевыми условиями к квазисингулярному интегральному уравнению с непрерывным ядром. Исследована структура ядра квазисингулярного интегрального уравнение в явном виде. Установлено условие нетеровости и вычислен индекс исследуемого квазисингулярного интегрального уравнения топологическим методом на комплексной плоскости.

Охарактеризованы спектральные параметры, при которых неоднородная краевая задача со смещением для уравнений Коши-Римана всюду разрешима в классе непрерывных функций на единичном круге. Приведенная задача носит нелокальный характер, и подобные задачи для операции Коши-Римана описаны М. Отелбаевым в 1982 году.

Решение некоторых сингулярных интегральных уравнений с ядрами, зависящими от разности и суммы аргументов изучались в работах И.И. Кальмушевского.Этот интерес объясняется как теоретической значимостью получаемых результатов, так и возможностями важных приложений. Подобные граничные задачи возникают при математическом моделировании задач газовой динамики, прогнозирование почвенной влаги, радиационный перенос, популяционная генетика и т.д. Простейшие примеры указанных краевых условий были сформулированы В.А. Стекловым 1922 г. В настоящей работе принципиальным отличием от вышеуказанной работы является вычисление индекса и установление условии нетеровости рассматриваемого квазисингулярного интегрального уравнения топологическим методом.

Ключевые слова: квазисингулярное интегральное уравнение, нетеровость, индекс, непрерывное ядро, аффикс, дуговой интервал, приращение аргумента.

Information about autor:

Imanbaev Nurlan Sairamovich – candidate of Physical and Mathematical sciences, Full Professor in Mathematics; Department of Mathematics, South Kazakhstan State Pedagogical University, A. Baitursynov str., 13, Shymkent, 160000; Chief Researcher the Institute of Mathematics and Mathematical Modelling, Pushkin str., Almaty, 050010, Kazakhstan. 8-777-963-59-74. E-mail: imanbaevnur@mail.ru. https://orcid.org/0000-0002-5220-9899.

REFERENCES

[1] Steklov V.A. (1922) The main problems of mathematical physics. V.I. II. Petrograd: Petrograd University. (in Russian).

[2] Frankl F.I. (1956) Airfoil gas with local supersonic zone. ending the direct shock wave. Applied Mathematics and Mechanics. V.20, №2.

[3] Nakhushev A.M.(1969) The new boundary value problem for a degenerate hyperbolic equation. Report of the Academy of Sciences of the USSR. V.187, №4, p. 736-739 (in Russian).

[4] Bitsadze A.V., Samarskiy A.A. (1969) On some simple generalizations of linear elliptic boundary value problems. Reports of the USSR Academy of Sciences. V.185, №4, p. 739-740 (in Russian).

[5] Nakhushev A.M. (2206) Problem with shift for partial differential equations. M.: "Nauka", 287 p. (in Russian).

[6] Baranetskiy Y.O., Kalenyuk P.I. (2020) Nonlocal Multipoint Problem with Multiple Spectrum for an Ordinary (2*n*) Order Differential Equation. Journal of Mathematical Sciences. **246**, 152-169 https://doi.org/10.1007/s10958-020-04727-y.

[7] Lunyov A.A., Malamud M.M. (2015) On the completeness and Riesz basis property of root subspaces of boundary value problems for first order systems and applications. Journal of Spectral Theory. 5, 17 -70. DOI 10.4171/jst/90.

[8] Imanbaev N.S. (2015) On stability of the basis property of root vectors system of the Sturm – Liouville operator with an integral perturbation of conditions in nonstrongly regular Samarskii-Ionkin type problems. International Journal of Differential Equations. Volume 2015, Article ID 641481, 6 pages. http://dx.doi.org/10.1155/2015/641481.

[9] Il'in V.A., Kritskov L.V. (2003) Properties of spectral expansions corresponding to non-self-adjoint differential operators. Journal of Mathematical Sciences. V.116, no 5, 3489-3550.

[10] Sabitov K.B. (2015) The Diriclet problem for higher-order partial differential equations. Mathematical Notes. 97, 255-267.

[11] Otelbaev M., Shynybekov A.N. (1982) Well-posedness of Bitsadze-Samarsky. Reports of the Academy of Sciences of the USSR, Vol.265, №4, pp.815-819.

[12] Mikhailets V.A. (1989) Spectral problems with general boundary conditions. Author. Disser...Doctor Sc. Kiev, 29 p.

[13] Usmanov Z.D. (1996) The variety of solutions of the singular generalized Cauchy-Riemann System. Mathematical Notes. 59:2 196-200.

[14] Tokibetov Zh.A., Sarsekeeva A.S. and Boltirekova R.A. (2020) Solution of the Riemann-Hilbert problem for a Holomorphic vector by the Bouligand-Girand Method. Journal of Mathematical Sciences. **246**, 445-451 DOI: 10.1007/s10958-020-04750-z.

[15] Imanbaev N.S. (2020) On basis property of systems root vectors of a loaded multiple differentiation operator. News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physico-Mathematical Series. Vol.1. Number 329 32-37. https://doi.org/10.32014/2020.2518-1726.4.

[16] Eroshenkov E.P., Kal'menov T.Sh. (1988) Completeness of the root vectors of the elliptic Bitsadze-Samarskii problem. Reports of the Academy of Sciences of the USSR. Vol.36, №2, pp.281-283.

[17] Imanbaev N.S., Kanguzhin B.E. (2018) On spectral question of the Cauchy- Riemann operator with homogeneous boundary value conditions. Bulletin of the Karaganda University. Mathematics. Vol.90, №2.

[18] Imanbaev N.S., Kanguzhin B.E. (2018) On Volterra property of the Cauchy- Riemann operator with homogeneous boundary conditions. Bulletin of the Institute of Mathematics. Tashkent, №5, p.1-5. http://mib.mathinst.uz.

[19] Mikhlin S.G. (1948) Singular integral equations. Advances in Mathematical Sciences.Vol.3, ser 25, pp.30-111.

[20] Muskhelishvili N.I. (1968) Singular Integral Equations. M.: "Nauka", 511p. (in Russian).

[21] Vekua I.N. (1988) Generalized Analytic Functions.M.: "Nauka", 512p. (in Russian).

[22] Soldatov A.P. (2020) Singular Integral Operators and Elliptic Boundary-Value Problems. Part I. Journal of Mathematical Sciences. **245**, 695-891.

[23] Titchmarsh E. (1980) Function Theory. M.: "Nauka", 463p. (in Russian).

S. Imanbaev, On nonlocal perturbation of the problem on eigenvalues of ferentiation operator on a segment, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. h.*, 2021, Volume 31, Issue 2, 186–193

DOI: https://doi.org/10.35634/vm210202

VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA. MATEMATIKA. MEKHANIKA. KOMP'UTERNYE NAUKI
2021. Vol. 31. Issue 2. Pp. 186–193.

MATHEMATICS

MSC2020: 35M10, 35M20

© *N. S. Imanbaev*

ON NONLOCAL PERTURBATION OF THE PROBLEM ON EIGENVALUES OF DIFFERENTIATION OPERATOR ON A SEGMENT

This work is devoted to the construction of a characteristic polynomial of the spectral problem of a first-order differential equation on an interval with a spectral parameter in a boundary value condition with integral perturbation which is an entire analytic function of the spectral parameter. Based on the characteristic polynomial formula, conclusions about the asymptotics of the spectrum of the perturbed spectral problem are established.

Keywords: differentiation operator, boundary value conditions, integral perturbation, function of bounded variation, characteristic polynomial, entire functions, zeros, eigenvalues, asymptotics.

DOI: 10.35634/vm210202

Introduction

The works [4,9,22,23] are devoted to the study of zeros of entire functions having an integral representation. Sometimes entire functions coincide with quasi-polynomials, zeros of which were investigated in [18,26]. Connection between the zeros of quasi-polynomials and spectral problems is reflected in [1,5,6,14,15,20]. Eigenvalue problems for some classes of differential operators on an interval are reduced to a similar problem. In particular, a spectral problem for a first-order equation on an interval with a spectral parameter in a boundary value condition with integral perturbation leads to the studied problem. Asymptotic properties of entire functions with a given distribution law of roots are deeply studied in the Doctoral Thesis of V. B. Sherstyukov, on the basis of which the paper [25] was published. Questions of location of zeros of an entire function: on one ray, on a straight line, on several rays, in an angle or arbitrarily on the complex plane were studied in [2,3,6,9,20,22,23].

Meromorphic functions of completely regular growth in the upper half-plane with respect to the growth function are studied in one of the last works of K. G. Malyutin and M. V. Kabanko [17]. This paper is devoted to the construction of a characteristic polynomial of the spectral problem for the differentiation operator on an interval with linear occurrence of a spectral parameter in the perturbed boundary value condition, which is an entire holomorphic function. On the basis of the characteristic polynomial formula, conclusions about the asymptotic behavior of the spectrum of the perturbed spectral problem are established. The considered problem belongs to the nonlocal type of spectral problems. Such problems have been studied many times before. Among the recent publications, we note [11,12,16,21]. The main fundamental feature of such tasks is their non-self-adjointness. This causes the main difficulties in considering them.

§ 1. Problem statement and main result

In the space $W_2^1(-1,1)$, we consider the eigenvalue problem for the differentiation operator:

$$L_1 y = y'(t) = \lambda y(t), \tag{1.1}$$

with the "perturbed" boundary value condition:

$$y(-1) - y(1) = \lambda \int_{-1}^{1} y(t)\,\Phi(t)\,dt, \tag{1.2}$$

where $\Phi(t)$ is a function with bounded variation and $\Phi(-1) - \Phi(1) = 1$, λ is a complex number, spectral parameter.

It is required to find complex values of λ, at which the operator equation (1.1) has a nonzero solution.

In the case when $\lambda = 0$ we have $y(t) = C$, i. e., $\lambda_0 = 0$ is an eigenvalue of the operator L_1.

In the case when $\lambda \neq 0$, general solution of the equation (1.1) can be represented by the formula $y(t) = Ce^{\lambda t}, \forall C > 0$, and satisfying it by the boundary value problem (1.2), we get the characteristic determinant of the spectral problem (1.1), (1.2):

$$\Delta_1(\lambda) = e^{-\lambda} - e^{\lambda} - \lambda \int_{-1}^{1} e^{\lambda t}\Phi(t)dt,$$

which is an entire analytical function of the variable $\lambda = x + iy$, $\operatorname{Re}\lambda = x$, $\operatorname{Im}\lambda = y$.

In the case when $\Phi(t) = 0$, the spectral problem (1.1), (1.2) is reduced to

$$L_0 y = y'(t) = \lambda y(t), \quad -1 < t < 1, \quad y(-1) = y(1), \tag{1.3}$$

moreover, the characterictic determinant of the "unperturbed" spectral problem (1.3) is the entire function: $\Delta_0(\lambda) = \dfrac{e^{-\lambda} - e^{\lambda}}{\lambda}$.

Numbers $\lambda_n^0 = in\pi$, $n = \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \ldots$, are eigenvalues, moreover, $\forall C > 0$ $y_{n_0}^0 = Ce^{in\pi t}$ are eigen functions of the "unperturbed" operator L_0, which form a complete orthonormal system in $L_2(-1, 1)$.

In the case $\Phi(t)$ is a function of bounded variation and $\Phi(-1) = \Phi(1) = 1$, equating the characteristic determinant $\Delta_1(\lambda)$ of the "perturbed" spectral problem (1.1), (1.2) to zero, we investigate distribution of zeros of the entire analytic function, which adequately determines eigenvalues of the operator L_1. Due to the well-known theorem [19], which says that any function with bounded variation has almost everywhere a finite derivative, we take integral from the expression $\int_{-1}^{1} e^{\lambda t}\Phi(t)\,dt$, by using the method of integration by parts.

Then the function $\Delta_1(\lambda)$ takes the following form:

$$\Delta_1(\lambda) = \frac{2\left(e^{\lambda} - e^{-\lambda}\right)}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}\int_{-1}^{1-\delta} e^{\lambda t} d\Phi(t) - \frac{1}{\lambda}\int_{1-\delta}^{1} e^{\lambda t} d\Phi(t).$$

Further, by using the known Rouche theorem [24], and due to this theorem, we introduce the function $f(\lambda) = \frac{2(e^{\lambda} - e^{-\lambda})}{\lambda} = \Delta_0(\lambda)$, and the difference $g(\lambda) = \Delta_1(\lambda) - f(\lambda)$. Let us show that the function $\Delta_1(\lambda)$ has no zeros out of the strip $|\operatorname{Re}\lambda| < k$ at some k. To do this we estimate the function $\Delta_1(\lambda)$ from below:

$$|\Delta_1(\lambda)| \geq \frac{2}{|\lambda|}e^{|\lambda|} - \frac{2}{|\lambda|}e^{-|\lambda|} - \frac{1}{|\lambda|}\int_{-1}^{1-\delta} e^{|\lambda| t} d|\Phi(t)| - \frac{1}{|\lambda|}\int_{1-\delta}^{1} e^{|\lambda| t} d|\Phi(t)|. \tag{1.4}$$

Therefore, we estimate the function $f(\lambda)$ from below, while the remaining terms of the function $g(\lambda)$ are estimated from above:

$$|f(\lambda)| \geq \frac{2}{|\lambda|}e^{x} - \frac{2}{|\lambda|}e^{-x}, \tag{1.5}$$
$$|g(\lambda)| \leq \left(\int_{-1}^{1-\delta} e^{xt} d|\Phi(t)| + \int_{1-\delta}^{1} e^{xt} d|\Phi(t)|\right).$$

We consider separately the estimation of each integral from (1.5). For this we use boundedness of variation of the function $\Phi(t)$. Then the first integral from (1.5) is estimated as follows:

$$\int_{-1}^{1-\delta} e^{xt} d\left|\Phi(t)\right| \leq e^{x(1-\delta)} \int_{-1}^{1-\delta} \left|d\Phi(t)\right| \leq e^{x(1-\delta)} \int_{-1}^{1} \left|d\Phi(t)\right| = e^{x(1-\delta)} H,$$

where $H = \int_{-1}^{1} \left|d\Phi(t)\right|$ is a constant.

Now we consider estimation of the second integral:

$$\int_{1-\delta}^{1} e^{xt} \left|d\Phi(t)\right| \leq e^{x} \int_{1-\delta}^{1} \left|d\Phi(t)\right| \leq e^{x} \varepsilon(\delta), \tag{1.6}$$

moreover $\varepsilon(\delta) \to 0$ as $\delta \to 0$. Thus, due to (1.4)–(1.6), we come to the estimation:

$$\Delta_1'(\lambda) \geq \frac{2}{|\lambda|}\left(e^{x} - e^{-x}\right) - \frac{1}{|\lambda|} e^{x(1-\delta)} H - \frac{1}{|\lambda|} e^{x} \varepsilon(\delta), |\lambda||\Delta_1(\lambda)| = |\Delta(\lambda)|.$$

$|\mathrm{Re}\,\Delta(\lambda)| \geq |e^{x} - e^{-x} O(1)| > e^{x}$, for $\mathrm{Re}\,\lambda = x \geq k$ that is $\Delta_1(\lambda)$ has no zeroes for these values of x. Similar reasoning is for negative x. We formulate the obtained result in the form of the following theorem.

Theorem 1. *If $\Phi(t)$ is a function of bounded variation and $\Phi(-1) = \Phi(1) = 1$, then all eigenvalues of the "perturbed" operator of differentiation L_1 belong to the strip $|\mathrm{Re}\,\lambda| = |x| < k$ for some k, where $\lambda = x + iy$.*

Calculation of zeros of the function $f(\lambda)$ implies $\lambda_n^0 = in\pi$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$, which coincide with zeros of the function $\Delta_0(\lambda)$, otherwise they coincide with eigenvalues of the operator L_0, i. e., "unperturbed" spectral problem (1.3). We consider a square T with the side 2ε centered at the point λ_n^0 on the complex plane λ. We choose a minimal $\varepsilon > 0$ such that conditions of the Rouche theorem [24] hold for the functions $f(\lambda), g(\lambda)$ on sides of the square T. Let us show that conditions of the Rouche theorem $|g(\lambda)| < |f(\lambda)|$ hold on sides of the square T, for this we compare majorant of the function $g(\lambda)$ with minorant of the function $f(\lambda)$:

$$\max_{T} |g(\lambda)| < \min_{T} |f(\lambda)|.$$

We estimate the function $f(\lambda)$ from below:

$$|f(\lambda)| = \frac{2}{|\lambda|}\left(e^{\lambda} - e^{-\lambda}\right) \geq \min_{T} \frac{2}{|\lambda|} \left|e^{\lambda} - e^{-\lambda}\right| = \frac{2}{\lambda_0^*} \left|e^{\lambda^*} - e^{-\lambda^*}\right|,$$

where $\lambda^* \in T$. The last equality follows from the fact that $|f(\lambda)|$ is a continuous function, and the square T is compact.

We estimate the function $g(\lambda)$ on sides of the square T. Imaginary axis divides the square T into two equal parts. We estimate the function $g(\lambda)$ on the right half of the square

$$|g(\lambda)| \leq \frac{1}{|\lambda|} \int_{-1}^{1-\delta} e^{xt} d\left|\Phi(t)\right| + \frac{1}{|\lambda|} \int_{1-\delta}^{1} e^{xt} d\left|\Phi(t)\right|.$$

We consider estimation of each term separately.

Let us estimate the first term. We choose $\frac{2}{n} \geq \delta \geq \frac{1}{n}$, then, due to the fact that $x \geq 0$, $-1 \leq t \leq 1 - \delta$, we obtain the inequality:

$$\frac{1}{|\lambda|} \int_{-1}^{1-\delta} e^{xt} d\left|\Phi(t)\right| \leq \frac{1}{|\lambda|} e^{x(1-\delta)} \int_{-1}^{1-\delta} d\left|\Phi(t)\right| \leq \frac{1}{|\lambda|} e^{x(1-\frac{1}{n})} \int_{-1}^{1-\frac{1}{n}} d\left|\Phi(t)\right| = \frac{1}{|\lambda|} C_1 e^{x(1-\frac{1}{n})},$$

where $C_1 = \int_{-1}^{1} d|\Phi(t)|$ is a constant.

We estimate the second term. Since $\max(xt) = x$, we have:

$$\frac{1}{|\lambda|}\int_{1-\delta}^{1} e^{xt} d|\Phi(t)| \le \frac{1}{|\lambda|}e^{x}\int_{1-\delta}^{1} d|\Phi(t)| \le \frac{1}{|\lambda|}e^{x}\int_{1-\frac{2}{n}}^{1} d|\Phi(t)| \le \frac{1}{|\lambda|}e^{x}\mu\left(\frac{1}{n}\right),$$

as $n \gg 1$. It is obvious that $\mu\left(\frac{1}{n}\right) \to 0$ as $n \to \infty$.

Now we estimate the function $g(\lambda)$ from above by the left half of the square:

$$|g(\lambda)| \le \frac{1}{|\lambda|}\int_{-1}^{-1+\delta} e^{xt} d|\Phi(t)| + \frac{1}{|\lambda|}\int_{-1+\delta}^{1} e^{xt} d|\Phi(t)|.$$

Estimation of the first term has the following form:

$$\frac{1}{|\lambda|}\int_{-1}^{-1+\delta} e^{xt} d|\Phi(t)| \le \frac{1}{|\lambda|}e^{-x}\int_{-1}^{-1+\delta} d|\Phi(t)| \le \frac{1}{|\lambda|}e^{-x}\int_{-1}^{-1+\frac{2}{n}} d|\Phi(t)| \le \frac{1}{|\lambda|}e^{-x}\mu\left(\frac{1}{n}\right),$$

as $n \gg 1$.

Here, as $n \to \infty$, the quantity $\mu\left(\frac{1}{n}\right) \to 0$. The second term is estimated as follows:

$$\frac{1}{|\lambda|}\int_{-1+\delta}^{1} e^{xt} d|\Phi(t)| \le \frac{1}{|\lambda|}e^{x(-1+\delta)}\int_{-1+\delta}^{1} d|\Phi(t)| \le \frac{1}{|\lambda|}e^{x(-1+\frac{1}{n})}\int_{-1+\frac{1}{n}}^{1} d|\Phi(t)| \le \frac{1}{|\lambda|}e^{x(-1+\frac{1}{n})}C_1,$$

where $C_1 = \int_{-1}^{1} d|\Phi(t)|$ is a constant.

Taking into account these inequalities, we choose $\varepsilon > 0$ such that the following inequality holds on sides of the square T:

$$\frac{2}{|\lambda_0^*|}\left|e^{\lambda^*} - e^{-\lambda^*}\right| > \frac{1}{|\lambda|}e^{|x|}C\left(\mu\left(\frac{1}{n}\right) + e^{-\frac{1}{n}|x|}\right).$$

To the left side of the inequality, we apply the Lagrange theorem on finite increments [13], then the following inequality is sufficient:

$$\frac{2}{|\lambda_0^*|}H\varepsilon > \frac{1}{|\lambda|}e^{|x|}C\left(\mu\left(\frac{1}{n}\right) + e^{-\frac{1}{n}|x|}\right),$$

where H is a constant, which bounds the derivative $\left(e^{\lambda} - e^{-\lambda}\right)$ from below on sides of the square T; e^{x} is bounded, since from $-\varepsilon < \operatorname{Re}\lambda < \varepsilon$ it follows that $e^{-\varepsilon} < e^{x} < e^{\varepsilon}$.

From boundedness of the differences $\lambda - \lambda_n^0$, $\lambda^* - \lambda_n^0$, it follows that the relation $\left|\frac{\lambda}{\lambda^*}\right|$ is bounded as $n \to \infty$.

Since $e^{-\frac{1}{n}x} > \mu\left(\frac{1}{n}\right)$, consequently, we obtain that $\varepsilon \approx \underline{\underline{o}}(1)$. Therefore, we prove the next theorem.

Theorem 2. *Let $\Phi(t)$ be a function of bounded variation and $\Phi(-1) = \Phi(1) = 1$. Then zeros of the function $\Delta_1(\lambda)$, that is, eigenvalues of the operator L_1 — "perturbed" spectral problem* (1.1), (1.2) *form a countable set and have the asymptotic $\lambda_n^0 = in\pi + \underline{\underline{o}}(1)$ as $n \to \infty$.*

Remark 1. One of the features of the considered problem is that conjugate to (1.1), (1.2) is the spectral problem for the loaded differential equation:

$$L_1^*\vartheta = \vartheta'(t) + \Phi(t)\overline{\lambda}\vartheta(-1) = \overline{\lambda}\vartheta(t), \quad \vartheta(-1) = \vartheta(1).$$

In [10], eigenvalues of a loaded differential operator of differentiation with general boundary value conditions on an interval have been found, and in [7, 8], questions of stability of basis properties of root vectors of a loaded multiple differentiation operator have been investigated in the space $L_2(0,1)$.

Funding. This research has been funded by the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan (Grant No. AP09260752).

REFERENCES

1. Bellman R., Cook K. *Differential-difference equations*, New York–London: Academic Press, 1963. Translated under the title *Differentsial'no-raznostnye uravneniya*, Moscow: Mir, 1967.
2. Braichev G. G. Sharp estimates of types of entire functions with zeros on rays, *Mathematical Notes*, 2015, vol. 97, no. 4, pp. 510–520. https://doi.org/10.1134/S0001434615030232
3. Braichev G. G., Sherstyukov V. B. Sharp bounds for asymptotic characteristics of growth of entire functions with zeros on given sets, *Fundam. Prikl. Mat.*, 2018, vol. 22, issue 1, pp. 51–97 (in Russian). http://mi.mathnet.ru/eng/fpm1781
4. Cartwright M. L. The zeros of certain integral functions, *The Quarterly Journal of Mathematics*, 1930, vol. os-1, issue 1, pp. 38–59. https://doi.org/10.1093/qmath/os-1.1.38
5. Hald O. H. Discontinuous inverse eigenvalue problems, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1984, vol. 37, issue 5, pp. 539–577. https://doi.org/10.1002/cpa.3160370502
6. Imanbaev N. S. Distribution of eigenvalues of a third-order differential operator with strongly regular boundary conditions, *AIP Conference Proceedings*, 2018, vol. 1997, article number 020027. https://doi.org/10.1063/1.5049021
7. Imanbaev N. S. On stability of basis property of root vectors system of the Sturm–Liouville operator with an integral perturbation of conditions in nonstrongly regular Samarskii–Ionkin type problems, *International Journal of Differential Equations*, 2015, vol. 2015, article ID 641481. https://doi.org/10.1155/2015/641481
8. Imanbaev N. S. Stability of the basis property of eigenvalue systems of Sturm–Liouville operators with integral boundary condition, *Electronic Journal of Differential Equations*, 2016, vol. 2016, no. 87, pp. 1–8. https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2016/87/imanbaev.pdf
9. Imanbaev N. S., Kanguzhin B. E., Kalimbetov B. T. On zeros of the characteristic determinant of the spectral problem for a third-order differential operator on a segment with nonlocal boundary conditions, *Advances in Difference Equations*, 2013, vol. 2013, article number 110. https://doi.org//10.1186/1687-1847-2013-110
10. Imanbaev N., Kalimbetov B., Khabibullaev Zh. To the eigenvalue problems of a special-loaded first-order differential operator, *International Journal of Mathematical Analysis*, 2014, vol. 8, no. 45, pp. 2247–2254. https://doi.org/10.12988/ijma.2014.48263
11. Ishkin Kh. K., Marvanov R. I. On localization conditions for spectrum of model operator for Orr–Sommerfeld equation, *Ufa Mathematical Journal*, 2020, vol. 12, no. 4, pp. 64–77. https://doi.org/10.13108/2020-12-4-64
12. Kritskov L. V. Uniform, on the entire axis, convergence of the spectral expansion for Schrödinger operator with a potential-distribution, *Differential Equations*, 2017, vol. 53, no. 2, pp. 180–191. https://doi.org/10.1134/S0012266117020045
13. Kudryavtsev L. D. *Kratkii kurs matematicheskogo analiza* (Short course in mathematical analysis), Moscow: Nauka, 1989.
14. Levin B. Ja. *Distribution of zeros of entire functions*, Providence, R.I.: AMS, 1964. Original Russian text *Raspredelenie kornei tselykh funktsii*, Moscow: Gostexizdat, 1956.
15. Leont'ev A. F. *Tselye funktsii. Ryady eksponent* (Entire functions. Exponential series), Moscow: Nauka, 1983.

16. Lunyov A. A., Malamud M. M. On the completeness and Riesz basis property of root subspaces of boundary value problems for first order systems and applications, *Journal of Spectral Theory*, 2015, vol. 5, issue 1, pp. 17–70. https://doi.org/10.4171/jst/90
17. Malyutin K. G., Kabanko M. V. The meromorphic functions of completely regular growth on the upper half-plane, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2020, vol. 30, issue 3, pp. 396–409. https://doi.org/10.35634/vm200304
18. Naimark M. A. *Lineinye differentsial'nye operatory* (Linear differential operators), Moscow: Fizmatlit, 2010.
19. Riesz F., Szökefalvi-Nagy B. *Leçons d'analyse fonctionnele*, Budapest: Akadémiai Kiadó, 1972. Translated under the title *Lektsii po funktsional'nomu analizu*, Moskow: Mir, 1979.
20. Sadovnichii V. A., Lyubishkin V. A., Belabbasi Yu. On regularized sums of roots of an entire function of a certain class, *Sov. Math., Dokl.*, 1980, vol. 22, pp. 613–616. https://zbmath.org/?q=an:0474.30027
21. Sadybekov M. A., Imanbaev N. S. Characteristic determinant of a boundary value problem, which does not have the basis property, *Eurasian Math. J.*, 2017, vol. 8, no. 2, pp. 40–46. http://mi.mathnet.ru/eng/emj255
22. Sedletskii A. M. On the zeros of the Fourier transform of finite measure, *Mathematical Notes*, 1993, vol. 53, no. 1, pp. 77–84. https://doi.org/10.1007/BF01208527
23. Titchmarsh E. C. The zeros of certain integral functions, *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1926, vol. s2-25, issue 1, pp. 283–302. https://doi.org/10.1112/plms/s2-25.1.283
24. Shabat B. V. *Vvedeniye v kompleksnyi analiz. V 2 chastyakh. Chast' 1. Funktsii odnogo peremennogo* (An introduction to complex analysis. In 2 parts. Part 1. Functions of one variable), Moscow: URSS, 2015.
25. Sherstyukov V. B. Asymptotic properties of entire functions with given laws of distribution of zeros, *Complex Analysis. Entire Functions and Their Applications. Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz.*, vol. 161, Moscow: VINITI, 2019, pp. 104–129. http://mi.mathnet.ru/eng/into435
26. Shkalikov A. A. The basis problem of the eigenfunctions of ordinary differential operators with integral boundary conditions, *Moscow University Mathematics Bulletin*, 1982, vol. 37, no. 6, pp. 10–20. https://zbmath.org/?q=an:0565.34020

Received 28.02.2021

Imanbaev Nurlan Sairamovich, Candidate of Physics and Mathematics, Professor, Department of Mathematics, South Kazakhstan State Pedagogical University, ul. Akhmeta Baitursynova, 13, Shymkent, 160000, Kazakhstan;
Chief Researcher, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, ul. Pushkina, 125, Almaty, 050010, Kazakhstan.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5220-9899
E-mail: imanbaevnur@mail.ru

Citation: N. S. Imanbaev. On nonlocal perturbation of the problem on eigenvalues of differentiation operator on a segment, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2021, vol. 31, issue 2, pp. 186–193.

МАТЕМАТИКА

Н. С. Иманбаев

О нелокальном возмущении задачи на собственные значения оператора дифференцирования на отрезке

Ключевые слова: оператор дифференцирования, краевые условия, интегральное возмущение, функция ограниченной вариации, характеристический многочлен, целые аналитические функции, нули целой функции, собственные значений, асимптотика.

УДК 517.927.5

DOI: 10.35634/vm210202

Построен характеристический многочлен спектральной задачи дифференциального уравнения первого порядка на отрезке со спектральным параметром в краевом условии с интегральным возмущением, которое является целой аналитической функцией от спектрального параметра. На основе формулы характеристического многочлена доказаны выводы об асимптотике спектра возмущенной спектральной задачи.

Финансирование. Исследования выполнены при финансовой поддержке Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахастан (грант № AP09260752).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М., Мир, 1967.
2. Брайчев Г. Г. Точные оценки типов целых функций с нулями на лучах // Матем. заметки. 2015. Т. 97. Вып. 4. С. 503–515. https://doi.org/10.4213/mzm10486
3. Брайчев Г. Г., Шерстюков В. Б. Точные оценки асимптотических характеристик роста целых функций с нулями на заданных множествах // Фундамент. и прикл. матем. 2018. Т. 22. Вып. 1. С. 51–97. http://mi.mathnet.ru/fpm1781
4. Cartwright M. L. The zeros of certain integral functions // The Quarterly Journal of Mathematics. 1930. Vol. os-1. Issue 1. P. 38–59. https://doi.org/10.1093/qmath/os-1.1.38
5. Hald O. H. Discontinuous inverse eigenvalue problems // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1984. Vol. 37. Issue 5. P. 539–577. https://doi.org/10.1002/cpa.3160370502
6. Imanbaev N. S. Distribution of eigenvalues of a third-order differential operator with strongly regular boundary conditions // AIP Conference Proceedings. 2018. Vol. 1997. Article number 020027. https://doi.org/10.1063/1.5049021
7. Imanbaev N. S. On stability of basis property of root vectors system of the Sturm–Liouville operator with an integral perturbation of conditions in nonstrongly regular Samarskii–Ionkin type problems // International Journal of Differential Equations. 2015. Vol. 2015. Article ID 641481. https://doi.org/10.1155/2015/641481
8. Imanbaev N. S. Stability of the basis property of eigenvalue systems of Sturm–Liouville operators with integral boundary condition // Electronic Journal of Differential Equations. 2016. Vol. 2016. No. 87. P. 1–8. https://ejde.math.txstate.edu/Volumes/2016/87/imanbaev.pdf
9. Imanbaev N. S., Kanguzhin B. E., Kalimbetov B. T. On zeros of the characteristic determinant of the spectral problem for a third-order differential operator on a segment with nonlocal boundary conditions // Advances in Difference Equations. 2013. Vol. 2013. Article number 110. https://doi.org//10.1186/1687-1847-2013-110
10. Imanbaev N., Kalimbetov B., Khabibullaev Zh. To the eigenvalue problems of a special-loaded first-order differential operator // International Journal of Mathematical Analysis. 2014. Vol. 8. No. 45. P. 2247–2254. https://doi.org/10.12988/ijma.2014.48263
11. Ишкин Х. К., Марванов Р. И. Об условиях локализации спектра модельного оператора для уравнения Орра–Зоммерфельда // Уфимск. матем. журн. 2020. Т. 12. Вып. 4. С. 66-79. http://mi.mathnet.ru/ufa536

12. Крицков Л. В. Равномерная на всей прямой сходимость спектрального разложения для оператора Шрёдингера с потенциалом-распределением // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53. № 2. С. 183–194. https://doi.org/10.1134/S0374064117020054
13. Кудрявцев Л. Д. Краткий курс математического анализа. М.: Наука, 1989.
14. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956.
15. Леонтьев А. Ф. Целые функции. Ряды экспонент. М.: Наука, 1983.
16. Lunyov A. A., Malamud M. M. On the completeness and Riesz basis property of root subspaces of boundary value problems for first order systems and applications // Journal of Spectral Theory. 2015. Vol. 5. Issue 1. P. 17–70. https://doi.org/10.4171/jst/90
17. Malyutin K. G., Kabanko M. V. The meromorphic functions of completely regular growth on the upper half-plane // Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki. 2020. Vol. 30. Issue 3. P. 396–409. https://doi.org/10.35634/vm200304
18. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Физматлит, 2010.
19. Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М.: Мир, 1979.
20. Садовничий В. А., Любишкин В. А., Белаббаси Ю. О регуляризованных суммах корней целой функции одного класса // Докл. АН СССР. 1980. Т. 254. № 6. С. 1346–1348. http://mi.mathnet.ru/dan43993
21. Sadybekov M. A., Imanbaev N. S. Characteristic determinant of a boundary value problem, which does not have the basis property // Eurasian Math. J. 2017. Vol. 8. No. 2. P. 40–46. http://mi.mathnet.ru/emj255
22. Седлецкий А. М. О нулях преобразования Фурье финитной меры // Матем. заметки. 1993. Т. 53. Вып. 1. С. 111–120. http://mi.mathnet.ru/mz3926
23. Titchmarsh E. C. The zeros of certain integral functions // Proceedings of the London Mathematical Society. 1926. Vol. s2-25. Issue 1. P. 283–302. https://doi.org/10.1112/plms/s2-25.1.283
24. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. В 2 частях. Часть 1. Функции одного переменного. М.: URSS, 2015.
25. Шерстюков В. Б. Асимптотические свойства целых функций с заданным законом распределения корней // Комплексный анализ. Целые функции и их применения. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. Т. 161. М.: ВИНИТИ РАН, 2019. С. 104–129. http://mi.mathnet.ru/into435
26. Шкаликов А. А. О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех. 1982. № 6. С. 12–21. http://mi.mathnet.ru/vmumm3582

Поступила в редакцию 28.02.2021

Иманбаев Нурлан Сайрамович, к. ф.-м. н., профессор, кафедра математики, Южно-Казахстанский государственный педагогический университет, 160000, Казахстан, г. Шымкент, ул. А. Байтурсынова, 13;
главный научный сотрудник, Институт математики и математического моделирования, 050010, Казахстан, г. Алматы, ул. Пушкина, 125.
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5220-9899
E-mail: imanbaevnur@mail.ru

Цитирование: Н. С. Иманбаев. О нелокальном возмущении задачи на собственные значения оператора дифференцирования на отрезке // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2021. Т. 31. Вып. 2. С. 186–193.

Imanbaev, N. S.

This is an algorithmically generated author record

South Kazakhstan State Pedag Univ
Phys & Math
SHYMKENT, KAZAKHSTAN

About

Published names Imanbaev, N. S Imanbaev, Nurlan S Imanbaev, Nurlan

Organizations

2018-2021	South Kazakhstan State Pedag Univ
2015-2021	Institute of Mathematics & Mathematical Modeling
2018-2020	Sout Kazakhstan State Pedag Univ
2019-2019	M Auezov South Kazakhstan State Pedag Univ
2017-2017	South Kazakhstan State Pedag Inst Show more

Web of Science ResearcherID: Y-5119-2019

PUBLICATIONS AUTHOR IMPACT BEAMPLOT

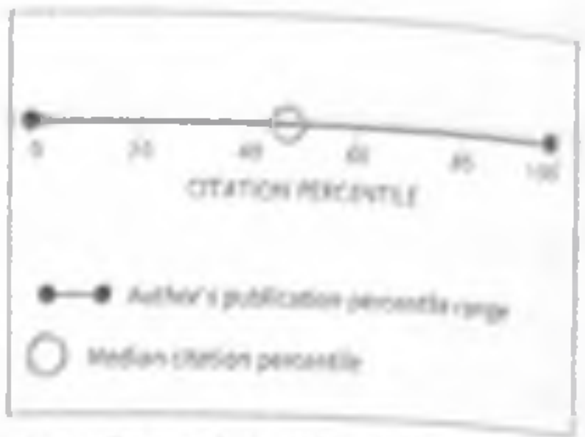
Are you this Author?

Verify your work, and control how your name, title, institution, and profile image appears in Web of Science Author Record

Claim my record

Author Metrics

Author Impact Beamplot Summary



Percentile range displays for authors from 1900 to 2021. View all publications in full beamplot.

View full beamplot

23 Publications from the Web of Science Core Collection

View as set of results | Date: Newest first | All Publications | 1 of 1

ON NONLOCAL PERTURBATION OF THE PROBLEM ON EIGENVALUES OF DIFFERENTIATION OPERATOR ON A SEGMENT
Imanbaev, N. S.
Published 2021 | VESTNIK UDMURTSKOGO UNIVERSITETA MATEMATIKA MEKHANIKA KOMPYUTERNYE NAUKI
0 Times Cited

ON BASIS PROPERTY OF SYSTEMS ROOT VECTORS OF A LOADED MULTIPLE DIFFERENTIATION OPERATOR
Imanbaev, N. S.
Published 2020 | NEWS OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN SERIES PHYSICO MATHEMATICAL
0 Times Cited

On a Problem that Does not Have Basis Property of Root Vectors, Associated with a Perturbed Regular Operator of Multiple Differentiation
Imanbaev, Nurlan S.
Published 2020 | JOURNAL OF SIBERIAN FEDERAL UNIVERSITY MATHEMATICS & PHYSICS
0 Times Cited

On eigenvalues of third order composite type equations with regular boundary value conditions
Imanbaev, N. S. and Ospanov, M. N.
Published 2019 | BULLETIN OF THE KARAGANDA UNIVERSITY-MATHEMATICS
0 Times Cited

On spectral question of the Cauchy-Riemann operator with homogeneous boundary value conditions
Imanbaev, N. S. and Kanguzhin, B. E.
Published 2018 | BULLETIN OF THE KARAGANDA UNIVERSITY-MATHEMATICS
0 Times Cited

Distribution of Eigenvalues of a Third-Order Differential Operator with Strongly Regular Boundary Conditions
Imanbaev, Nurlan S.
Published 2018 | AIP CONFERENCE PROCEEDINGS
2 Times Cited

A regular differential operator with perturbed boundary condition
Sadybekov, M. A. and Imanbaev, N. S.
Published 2017 | MATHEMATICAL NOTES
22 Times Cited

CHARACTERISTIC DETERMINANT OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM, WHICH DOES NOT HAVE THE BASIS PROPERTY
Sadybekov, M. A. and Imanbaev, N. S.
Published 2017 | EURASIAN MATHEMATICAL JOURNAL
5 Times Cited

Citation Network

5 h-index
23 Total Publications
105 Sum of Times Cited
62 Citing Articles

View citation report

Author Position

First
Last
Corresponding

! Мы не можем связаться с RefWorks. Функции, требующие связи с RefWorks, в настоящий момент работать не будут. Повторите попытку позднее.

Эта запись об авторе обновлялась 1 мая. Подробнее

Imanbaev, Nurlan S.

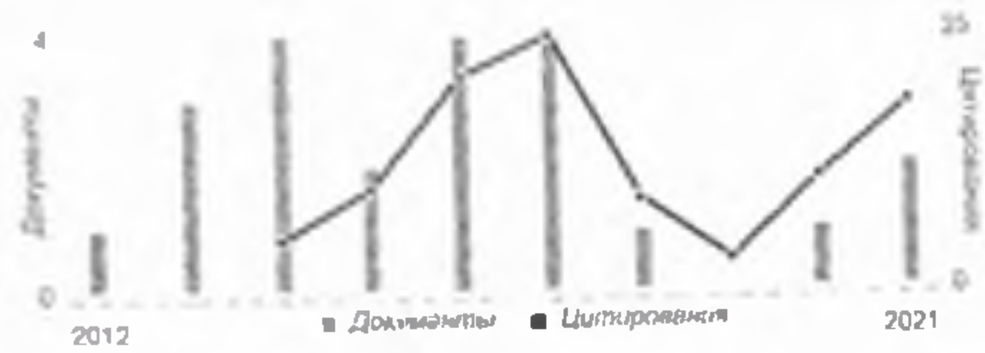
South Kazakhstan State Pedagogical University, Shymkent, Kazakhstan
https://orcid.org/0000-0002-5220-9899

Редактировать профиль Настроить оповещение
Потенциальные соответствия авторов Экспортировать в SciVal

Обзор показателей

22 Документы автора
102 Цитирования по 58 докум
6 h-индекс

Документ и тенденции цитирования



Темы с наибольшим вкладом 2016–2020

Differential Operators; Spectral Expansion; Riesz Basis
3 документы
Biharmonic Equations; Involution; Boundary Value Problems
3 документы

Просмотреть все темы

22 документов Цитирования в 58 документах Beta o Препринты Соавторов: 12 Темы o Awarded grants

Примечание.
Пользователи Scopus Preview могут просматривать только последние 10 документов автора, и большинство остальных функций не работают. У вас есть доступ через учреждение? Узнайте в своем учреждении о наличии доступа, чтобы просматривать все документы и пользоваться всеми функциями.

Экспортировать все Добавить все в список Сортировать по Дата (самые новые)

› Просмотреть список в формате результатов поиска

Просмотреть пристатейных ссылок

Настроить оповещение о документах

Article • Открытый доступ
On Computation Of Eigenfunctions Of Composite Type Equations With Regular Boundary Value Conditions
Imanbaev, N.S., Kurmysh, Y.
International Journal of Applied Mathematics 2021, 34(4), стр. 681-692
Просмотреть реферат Связанные документы
0 Citations

Article • Открытый доступ
On nonlocal perturbation of the problem on eigenvalues of differentiation operator on a segment
Imanbaev, N.S.
Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika, Mekhanika, Komp'yuternye Nauki
2021, 31(2), стр. 186–193
Просмотреть реферат Связанные документы
0 Citations

perturbed regular operator of multiple differentiation

Imanbaev, N.S.

Journal of Siberian Federal University - Mathematics and Physics, 2020, 13(5), стр. 568-573

Просмотреть реферат Связанные документы

Conference Paper

Distribution of eigenvalues of a third-order differential operator with strongly regular boundary conditions

2 Citations

Imanbaev, N.S.

AIP Conference Proceedings, 2018, 1997, 020027

Просмотреть реферат Связанные документы

Conference Paper

About characteristic determinant of one boundary value problem not having the basis property

0 Citations

Imanbaev, N.S., Sadybekov, M.A.

AIP Conference Proceedings, 2017, 1880, 050002

Просмотреть реферат Связанные документы

Article

A regular differential operator with perturbed boundary condition

23 Citations

Sadybekov, M.A., Imanbaev, N.S.

Mathematical Notes, 2017, 101(5-6), стр. 878-887

Просмотреть реферат Связанные документы

Conference Paper

Regular Sturm-Liouville Operators with Integral Perturbation of Boundary Condition

0 Citations

Imanbaev, N.S., Sadybekov, M.A.

Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, 2017, 216, стр. 222-234

Просмотреть реферат Связанные документы

Article

Characteristic determinant of a boundary value problem, which does not have the basis property

6 Citations

Sadybekov, M.A., Imanbaev, N.S.

Eurasian Mathematical Journal, 2017, 8(2), стр. 40-46

Просмотреть реферат Связанные документы

Conference Paper

Stability of the basis property of system of root functions of Sturm-Liouville operator with integral boundary condition

0 Citations

Imanbaev, N.

AIP Conference Proceedings, 2016, 1789, 040026

Просмотреть реферат Связанные документы

Conference Paper

Green's function of the heat equation with periodic and antiperiodic boundary conditions

0 Citations

Imanbaev, N., Erzhanov, N.

AIP Conference Proceedings, 2016, 1789, 040027

Просмотреть реферат Связанные документы

Назад»

КАЗАКСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ
МИНИСТРЛІГІ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

М. ӘУЕЗОВ атындағы ОҢТҮСТІК ҚАЗАҚСТАН МЕМЛЕКЕТТІК УНИВЕРСИТЕТІ
ЮЖНО-КАЗАХСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. М. АУЕЗОВА

ДИССЕРТАЦИЯЛЫҚ КЕҢЕС К 14.29.13 ДИССЕРТАЦИОННЫЙ СОВЕТ

486050, Шымкент қаласы, Тәуке хан даңғылы, 5
Тел. (8-325-2) 21-19-67
486050, город Шымкент, просп. Тауке хана, 5

14.06.2004 № 7-070

Кандидату физ.-мат. наук,
доценту Иманбаеву Н.С.

Уважаемый Нурлан Сайрамович,

Диссертационный совет К 14.29.13 при ЮКГУ им. М.О. Ауезова принял к защите диссертацию Бесбаева Г.А «Разрешимость и спектральные свойства квазирегулярной задачи Коши-Дирихле и ее сопряженной для одного класса гиперболических уравнений» по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения и математическая физика – на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук и просит Вас выступить в качестве официального оппонента названной диссертации.

Просим Вас в отзыве отразить следующие моменты:

1. Актуальность темы и ее связь с общенаучными и общегосударственными программами.
2. Научные результаты в рамках требований к диссертациям по Положению о порядке присуждения ученых степеней. Соответствие паспорту соответствующей специальности.
3. Степень обоснованности и достоверности результатов диссертации.
4. Степень новизны результатов диссертации.
5. Оценка внутреннего единства полученных результатов.
6. Направленность полученных соискателем результатов на решение соответствующей актуальной проблемы, теоретической или прикладной задачи.
7. Подтверждение опубликования основных положений, результатов диссертации.
8. Соответствие автореферата содержанию диссертации.
9. Недостатки по содержанию и оформлению диссертации.
10. Соответствие диссертации требованиям, предъявляемым «Правилами присуждения ученых степеней ВАК РК».

Направляем Вам для рассмотрения диссертацию и автореферат диссертации Бесбаева Г.А.
Просим представить в наш адрес отзыв на диссертацию в 2 экз., заверенный гербовой печатью не позднее, чем за 10 дней до защиты.
Защита диссертации состоится 8 июля 2004 г.
Наш адрес: 486050, Шымкент, проспект Тауке – хана, 5, ЮКГУ им. М.О. Ауезова.

Ученый секретарь диссертационного совета
К 14.29.13, доктор физ.-мат. наук, профессор Фазылов А.З.

Вх. № 1026
от 9 06 04 г.

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ
МИНИСТРЛІГІ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

М. ӘУЕЗОВ атындағы ОҢТҮСТІК ҚАЗАҚСТАН МЕМЛЕКЕТТІК УНИВЕРСИТЕТІ
ЮЖНО-КАЗАХСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. М. АУЕЗОВА

ДИССЕРТАЦИЯЛЫҚ КЕҢЕС К 14.29.13 ДИССЕРТАЦИОННЫЙ СОВЕТ

486050, Шымкент қаласы, Тәуке хан даңғылы, 5
Тел. (8-325-2) 21-19-67
486050, город Шымкент, просп. Тауке хана, 5

№ 7-124

Члену диссертационного совета
К 14.29.13 при ЮКГУ им.
М.Ауезова к. ф.-м. н., доценту
Н.С. Иманбаеву

ШИ МКТУ им. Х.-А. Ясави

Диссертационный совет К 14.29.13 при ЮКГУ им. М. Ауезова извещает Вас о своем заседании **23 декабря 2004 года в 15.00** и просит **Вас** принять в нем участие.

Повестка дня заседания:

1. Защита диссертации Ахметовой Сабиры Тастановны «Спектральные свойства краевых задач для одного класса дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.02 – «Дифференциальные уравнения и математическая физика».

2. Защита диссертации Дайырбекова Серика Сансызбаевича «Развитие учебной активности учащихся школ общественно-гуманитарного направления в обучении математике с приминением компьютера» на соискание ученой степени кандидата педагогических наук по специальности 13.00.02 – «Теория и методика обучения и воспитания (математика)».

Ученый секретарь диссертационного
совета К 14.29.13, доктор
физ.-мат. наук Фазылов А.З.

Подпись учен. секретаря Фазылова А.З. заверяю
Секретарь учен. совета Т.Ж. Пусурманова

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ
МИНИСТРЛІГІ

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

М. ӘУЕЗОВ атындағы ОҢТҮСТІК ҚАЗАҚСТАН МЕМЛЕКЕТТІК УНИВЕРСИТЕТІ
ЮЖНО-КАЗАХСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. М. АУЕЗОВА

ДИССЕРТАЦИЯЛЫҚ КЕҢЕС К 14.29.13 ДИССЕРТАЦИОННЫЙ СОВЕТ

486050, Шымкент қаласы, Тәуке хан даңғылы, 5
Тел. (8-325-2) 21-19-67
486050, город Шымкент, просп. Тауке хана, 5

23.11.04. № 7-110

Кандидату физ.-мат. наук,
доценту Иманбаеву Н.С.

Уважаемый Нурлан Сайрамович,

Диссертационный совет К 14.29.13 при ЮКГУ принял к защите диссертацию Ахметовой Сабиры Тастановны «Спектральные свойства краевых задач для одного класса дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом» по специальности 01.01.02-«Дифференциальные уравнения и математическая физика» на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук и просит Вас выступить в качестве официального оппонента названной диссертации.

Просим Вас в отзыве отразить следующие моменты:

1. Актуальность темы и ее связь с общенаучными и общегосударственными программами.
2. Научные результаты в рамках требований к диссертациям по Положению в порядке присуждения ученых степеней. Соответствие паспорту соответствующей специальности.
3. Степень обоснованности и достоверности результатов диссертации.
4. Степень новизны результатов диссертации.
5. Оценка внутреннего единство полученных результатов.
6. Направленность полученных соискателем результатов на решение соответствующей актуальной проблемы, теоретической или прикладной задачи.
7. Подтверждение опубликования основных положений результатов диссертации.
8. Соответствие автореферата содержанию диссертации.
9. Недостатки по содержанию и оформлению диссертации.
10. Соответствие диссертации требованиям, предъявляемым «Правилами присуждения ученых степеней ВАК РК».

Направляем Вам для рассмотрения диссертацию и автореферат диссертации Ахметовой С.Т.

Просим представить в наш адрес отзыв на диссертацию в 2 экз., заверенный гербовой печатью не позднее, чем за 10 дней до защиты.

Защита диссертации состоится 23 декабря 2004г.

Наш адрес: 486050, г. Шымкент, проспект Тауке-хана, 5, ЮКГУ им. М.Ауезова

Ученый секретарь диссертационного совета
К 14.29.13, доктор физ-мат. наук Фазылов А.З.

Российская Академия Наук

УЧРЕЖДЕНИЕ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И АВТОМАТИЗАЦИИ КАБАРДИНО-БАЛКАРСКОГО НАУЧНОГО ЦЕНТРА РАН

ул. Шогенова, 89-А, Нальчик, 360000, тел. (8662) 42-66-61, факс (8662) 42-70-06, E-mail:nipma@mail333.com ОКПО 02842706, ОГРН 1030700201906, ИНН/КПП 0711001396/071301001

Иманбаеву Н.,
Институт математики, информатики
и механики Комитета науки
Минобрнауки Республики Казахстан

050010, г. Алматы, ул. Шевченко, 28

Уважаемый Нурлан Иманбаев!

Ваш доклад «Характеристический определитель спектральной задачи для обыкновенного дифференциального оператора с интегральным возмущением краевого условия» включен в программу II Международного Российско-Казахского симпозиума «Уравнения смешанного типа, родственные проблемы анализа и информатики», Нальчик, 23-27 мая 2011 г., в качестве устного выступления на секции «Краевые задачи для дифференциальных уравнений, родственные проблемы теории функций и функционального анализа».

Зам. директора по научной работе А.В. Псху

РАМАЗАНОВА ХАНЫМ САГИНГАЛИЕВНА

Информация о защите диссертации на соискание степени доктора философии (PhD) Рамазановой Ханым Сагингалиевны на тему «Жартылай сызықты дифференциалдық теңдеулердің бір класының сапалық қасиеттері» по специальности «6D060100 – Математика».

Язык защиты: казахский.

Диссертация выполнена на кафедре фундаментальной математики Евразийского национального университета им.Л.Н. Гумилева.

Рецензенты:

Иманбаев Нурлан Сайрамович – кандидат физико-математических наук, профессор, ЮКГПИ, г. Чимкент, специальность 01.01.02;

Женсикбаев Куанткан Сержанович – кандидат физико-математических наук, доцент, КазНУ, г. Алматы, специальность 01.01.01.

Научные консультанты:

Ойнаров Рыскул – доктор физико-математических наук, профессор, ЕНУ им. Л.Н.Гумилева, г. Астана, Казахстан;

Тиряки Айдын – PhD, профессор, Измирский Университет, Турция.

Защита состоится 10 февраля 2017 года в 11:00 часов в диссертационном совете при КазНУ им. аль-Фараби по группе специальностей «6D060100 – Математика», «6D060300 – Механика», «6D070500 – Математическое и компьютерное моделирование», «6D074600 – Космическая техника и технологии», по адресу: г.Алматы, проспект аль-Фараби 71, механико-математический факультет, аудитория № 213.

Дата публикации: 28.12.2016

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ имени М.В. ЛОМОНОСОВА
ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ имени В.А. СТЕКЛОВА РАН
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР имени А.А. ДОРОДНИЦЫНА ФИЦ ИУ РАН

МЕЖДУНАРОДНАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ
«СОВРЕМЕННЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ. ПОНТРЯГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ - XXIX»

посвященная 90-летию академика РАН
Владимира Александровича Ильина

СЕРТИФИКАТ УЧАСТНИКА

Данный сертификат подтверждает, что

Иманбаев Нурлан Сайрамович

принял участие в Международной конференции
«Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения - XXIX»,
посвященной 90-летию академика РАН Владимира Александровича Ильина
(Москва, 2-6 мая 2018 года) и выступил с докладом на тему

Регулярные дифференциальные операторы с интегральным возмущением краевого условия

Зам. председателя Оргкомитета,
профессор И.С. Ломов

Адрес Оргкомитета:
119991 ГСП-1 Москва, Ленинские горы, МГУ имени М.В.Ломоносова,
2-й уч. корпус, факультет ВМК, к.716, Оргкомитет
Тел.: +7 (495) 939 30 10, +7 (495) 939 55 91
E-mail: ilin90@cs.msu.ru Сайт: www.ilin90.math.msu.ru

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
«АКАДЕМИК Е.А. БӨКЕТОВ
АТЫНДАҒЫ
ҚАРАҒАНДЫ УНИВЕРСИТЕТІ»
коммерциялық емес акционерлік қоғамы
100024, Қарағанды қ., Университет к-сі, 28 үй,
тел.: 35-64-12, тел./факс: 35-63-98
e-mail: office@ksu.kz buketov.edu.kz

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН
Некоммерческое акционерное общество
«КАРАГАНДИНСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
АКАДЕМИКА Е.А. БУКЕТОВА»
100024, г. Караганда, ул. Университетская, 28,
тел.: 35-64-12, тел./факс: 35-63-98
e-mail: office@ksu.kz buketov.edu.kz

MINISTRY OF EDUCATION AND SCIENCE OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
Non-profit limited company
«KARAGANDY UNIVERSITY OF THE NAME OF ACADEMICIAN E.A. BUKETOV»
28, Universitetskaya Str., Karaganda, Kazakhstan, 100024
tel.: 35-64-12, tel./fax: 35-63-98
e-mail: office@ksu.kz buketov.edu.kz

№ 15-2-1/4064 от «12» 11 2021 ж.
№ ____ от ____ «____» ____ 20____ г.

Комитет по обеспечению качества
в сфереобразования и наукиМОН РК

Карагандинский университет имени академика Е.А.Букетова просит разместить на сайте Комитета по обеспечению качества в сфере образования и науки Министерства образования и науки информацию о защите диссертации на соискание степени доктора философии (PhD) Кельдибековой Алии Болатовны на тему «Решение краевых задач для псевдопараболических уравнений третьего порядка» по специальности 6D060100-«Математика».

Форма представления диссертации: диссертационная работа.

Язык защиты: русский.

Диссертация выполнена на кафедре Математического анализа и дифференциальных уравнений Карагандинского университа имени академика Е.А.Букетова.

Рецензенты:

1. Калимбетов Бурхан Тешебаевич – доктор физико-математических наук, профессор, Международный казахско-турецкий университет имени Ходжи Ахмеда Ясави, Туркестан; специальность 01.01.02.

2. Оспанов Мырзагали Наурызханович – кандидат физико-математических наук, доцент ЕНУ им. Л.Н. Гумилева, Нур-Султан, специальность 01.01.02.

Научные консультанты:

Орумбаева Нургул Тумарбековна – кандидат физико-математических наук, ассоциированный профессор Карагандинского университа имени академика Е.А.Букетова, Караганда, Казахстан;

Псху Арсен Владимирович - доктор физико-математических наук, профессор Института прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН, Нальчик, Россия.

Временные члены диссертационного совета:

Муратбеков М. - д.ф.-м.н. (01.01.02 – Дифференциальные уравнения и математическая физика), профессор, Таразский региональный университет им. М.Х. Дулати, Тараз;

Тлеубергенов М.И. – д.ф.-м.н. (01.01.02 – Дифференциальные уравнения и математическая физика), профессор, РГП «Институт математики и математического моделирования», ГНС, Алматы.

Бакирова Э.А. . – к.ф.-м.н. (01.01.02 – Дифференциальные уравнения и математическая физика), ассоциированный профессор (доцент), РГП «Институт математики и математического моделирования», ВНС, Алматы;

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ

«К. ЖҰБАНОВ атындағы
АҚТӨБЕ ӨҢІРЛІК УНИВЕРСИТЕТІ»
коммерциялық емес акционерлік қоғамы

030000, Ақтөбе қаласы, Ә. Молдағұлова даңғылы, 34
Тел./факс: 8(7132) 54-06-19

ZHUBANOV UNIVERSITY
1935

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ
И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

Некоммерческое акционерное общество
«АКТЮБИНСКИЙ РЕГИОНАЛЬНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ имени К. ЖУБАНОВА»

030000, город Актобе, пр-т А.Молдагуловой, 34
Тел./факс: 8(7132) 54-06-19

№ 21-18/3022
01.11.2021

Ректору
Южно-Казахстанского
государственного педагогического
университета к.и.н. Сугирбаевой Г.Д.

Решением диссертационного совета при Актюбинском региональном университете имени К. Жубанова, (протокол №5 от 28 октября 2021 года) Иманбаев Нурлан Сайрамович – кандидат физико-математических наук, профессор кафедры математики Южно-Казахстанского государственного педагогического Университета, утвержден в качестве официального рецензента по диссертации Токмурзина Жанибека Сырлыбаевича на тему «Төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер үшін бастапқы-шеттік есептерді шешу әдістері» на соискание степени доктора философии (PhD) по специальности «6D060100 – Математика».

Диссертационный совет направляет указанную диссертацию официальному рецензенту и просит Вас обеспечить отзыв не позднее 15 декабря 2021 г. и присутствие официального рецензента на защите диссертации, которая состоится 21 декабря 2021 года в 15:00 часов в диссертационном совете при АРУ имени К. Жубанова в формате онлайн на платформе ZOOM: идентификатор 201 904 8873.

На основе изучения диссертации и опубликованных работ следует предоставить вдиссертационный совет письменный отзыв по форме согласно приложению 5 к Типовому положению о диссертационном совете, утвержденному Приказом № 98 Министра образования и науки Республики Казахстан от 09 марта 2021 года.

Также в отзыве следует указать одно из следующих решений:

1) ходатайствовать перед Комитетом по обеспечению качества в сфере образования и науки МОН РК о присуждении Токмурзину Жанибеку Сырлыбаевичу степени доктора философии (PhD) по специальности «6D060100 – Математика»;

2) направить диссертацию Токмурзина Жанибека Сырлыбаевича на тему «Төртінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер үшін бастапқы-шеттік есептерді шешу әдістері» на доработку.

3) отказать в присуждении Токмурзину Жанибеку Сырлыбаевичу степени доктора философии (PhD) по специальности «6D060100 – Математика».

Проректор по науке и инновациям **Р.А.Бекназаров**

Председатель диссертационного совета **Ж.А.Сартабанов**

Исп.: Бекбауова А.У.
Тел.: +77710241324

. Иманбаев Н.С. Асимптотика нулей целых функций одного класса. Учебное пособие. Алматы: «Комплекс» – 2000. – 48 с. – **ISBN 9965-484-20-1**

. Нурлан Иманбаев Задачи на собственные значения дифференциального оператора Коши-Римана. **Монография**. LAP LAMBERT Academic Publishing. Saarbrucken, Deutschland / Германия: 2012. – 106 с. **ISBN: 978-3-8484-9239-8**

. Н.С. Иманбаев Функциялар теориясының кейбір қосымша тарауларына кіріспе. **Оқу құралы**. Алматы: «Заңғар» – 2013.–104 б.
ISBN 978-601-243-530-6

- Иманбаев Н.С. Бір класстағы бүтін функциялардың нөлдерінің асимптотикасы. **Оқу құралы**. Шымкент: «Әлем» – 2018. – 45 б.
ISBN 978-9965-618-54-3

- Иманбаев Н.С. Неусиленно регулярные спектральные задачи: Описание классов краевых условий и устойчивость свойства базисности корневых векторов. **Монография**. Алматы: «Tandem –2» –2018. –128 с.
ISBN: 978-9965-618-52-9

СБОРНИК

единоличных научных публикаций

к.ф. - м.н., профессора Иманбаева Н.С.

«Спектральные задачи дифференциальных операторов

с регулярными краевыми условиями»

Монография

Басуға 02.02.2022 жылы қол қойылды.
Қаріп түрі «Times New Roman»
Көлемі 12,25 шартты баспа табақ. Таралымы 500 дана.
«Әлем» баспаханасы. Тапсырыс №0201.
Шымкент қаласы, Ғ.Іляев көшесі, 7

+ 7 702 331 44 37, +7 776 331 44 37
Email: alembaspasy@mail.ru